

II-81

振動流中の円柱に働く力と
エネルギー損失について

北見工業大学工学部 正員 佐藤 幸雄
北海道大学工学部 正員 浜 中 建一郎

I. まえがき

円柱を流れの方向に垂直および底面に対して水平に設置した2次元な場合を考えることとして、この円柱より遠く離れた領域に水平振動流を与えたとき、流体の粘性のある条件以上では円柱表面に剥離が起きる。この剥離は時間経過と共に次第に発達し、その後円柱表面から遊離し剥離渦となって流体中に放出される。

このような剥離渦を伴った流れ構造についてはすでに、佐藤・浜中らにより発表済¹⁾であり、その中で、さらに、この剥離の発生と円柱のまわりに働く流体力の関係を詳細に調べ、剥離の発生が流体力に微妙に影響を与えていることを述べている。これらの状況を踏まえて、本研究では剥離を伴う流体内部におけるエネルギー損失量を Navier-Stokes の方程式を使用して、数値計算により求め、エネルギー損失量が流体力にどのような影響を与えているかを2・3の場合について検討を行った。以下にその結果について述べる。

II. 基本方程式

円柱のまわりの2次元流を考えて、流れに垂直方向にy軸、平行方向にx軸を取る。またすべての変量について、“'”を付した有次元量を円柱の半径R'と水平振動流の振動数σ'を使用して無次元化すると、x, y座標、時間、振動流振幅、流速成分、流れ関数、渦度および動粘性係数に関してはそれぞれ

$$x' = R'x, \quad y' = R'y, \quad \sigma' t' = t, \quad A' = R'A$$

$$u' = \sigma' R'u, \quad v' = \sigma' R'v$$

$$\phi' = \sigma' R'^2 \phi, \quad \omega' = \sigma' \omega, \quad \nu' = \sigma' R'^2 \nu$$

である。

これらの無次元変量を使用して書き表わした無次元渦度方程式および流れ関数に関するポアソン方程式はそれぞれ式(1)と(2)である。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \Delta \omega \quad (1)$$

$$\Delta \phi = -\omega$$

ここで、Δはラプラシアンで

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{である。}$$

式(1)および(2)に式(3)を使用した新しい等角写

像の座標系を導入して(r, θ)座標系に変換すると、式(4)および(5)である。

$$x = e^r \cos \theta, \quad y = e^r \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \right\} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -J \omega \quad (5)$$

ここで、Jは式(3)のヤコビアンで、

$$J = e^{2r} \quad (6)$$

である。式(4)および(5)に対する境界条件は、

円柱表面上のr=0において、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0, \quad \omega = -J^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left\{ \frac{2\phi (\Delta \zeta)}{(\Delta \zeta)^2} \right\} \quad (7)$$

また、円柱から遠く離れたところのr=∞で

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = A \sin t, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \omega = 0 \quad (8)$$

である。さらに円柱の近傍の座標を細かく設定する

ため、 r の値を式(9)により与える。式中の b は、座標の歪を表し、また、式(7)の ζ の値は、式(9)に新しく導入された ζ と同じものである。

$$r = r_T \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (9)$$

r_T は、円柱より遠く離れた点($\zeta=1$)の r の値である。座標系を図-1に示した。

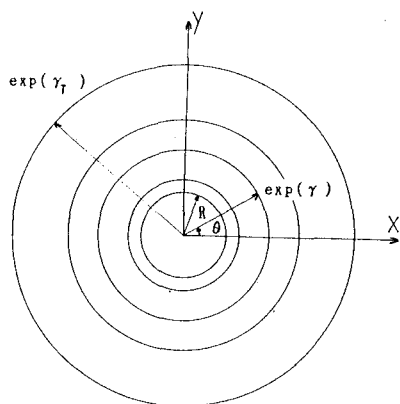


図-1 座標系の定義

III. 圧力場

Navier-Stokesの方程式を使用してII.と同様の無次元化を行うことにより圧力場を与える式は、次のように表される。

$$\Delta p = 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (10)$$

ここで

$$p = \frac{p'}{\rho' (\sigma'R)^2}, \quad \rho'; \text{ 流体の密度}$$

式(10)に対する境界条件は、円柱表面において、

$$r=0 \text{ 上で、 } \frac{\partial p}{\partial r} = -\nu \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \quad (11)$$

であり、また、円柱より充分遠いところの圧力はポテンシャルの圧力に等しいと仮定して、

$$r=r_T \text{ で } p = -A (e^{\gamma_T} + e^{-\gamma_T}) \cos \theta \cos t \text{ で表す。} \quad (12)$$

式(10)により圧力場 p の値を求めるときは、まずII.において、渦度 ω および流れ関数 ϕ の値を求め

ておくと、この流れ関数 ϕ の値を使用して、II.で ϕ を求めたときと同様の方法で求めることが出来る。

IV. エネルギー損失量

Navier-Stokesの方程式を使用して粘性流体中のエネルギー損失量を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \quad (13) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \quad (14) \end{aligned}$$

となる。一方、運動エネルギー E の時間変化を求めると、

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t} \quad (15)$$

式(15)に式(13)および(14)を代入して、さらに、2次元連続の式 $\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$ を考慮すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= -2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ &\quad - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (16) \end{aligned}$$

式(16)の右辺は各項共に常に負の値であり、運動エネルギーを減じる効果を持っていることから、粘性によって生るエネルギー損失を表すことになる。

したがって、式(16)より $\partial E / \partial t = E(x, y)$ とおいて、

$$\begin{aligned} E(x, y) &= -2\mu \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (17) \end{aligned}$$

また、式(17)を流れ関数 ϕ を用いて書き表すと、

$$E(x, y) = -4\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2$$

$$-\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \quad (18)$$

となる。さらに円柱のまわりの (x, y) 系領域全体についてのエネルギー損失量 $E_T(x, y)$ を求めると、

$$E_T = \iint E(x, y) dx dy = \iint E(r, \theta) J dr d\theta \quad (19)$$

で表される。ここに、 $E(x, y)$ 、 $E(r, \theta)$ はそれぞれ (x, y) 系、 (r, θ) 系におけるエネルギー損失を表す。また、 $J = e^{2r}$ (ヤコビアン) である。

$E_T(x, y)$ の計算方法は、まず II で計算された各メッシュ上の流れ関数 ϕ の値を式(18)を有限差分化した式に代入して $E(r, \theta)$ を求める。つぎに、各格子点のまわりの微小領域 $(dr \cdot d\theta)$ を乗じて、円柱のまわり全体領域のエネルギー損失量 E_T を計算することが出来る。ただし、 dr の値は式(9)を用いて算する。

V. 計算条件と計算結果

無次元化された振動流の振幅 A と動粘性係数 ν を使用すると、レイノルズ数 Re とストローハル数 S は式(20)によって表される。

$$Re = \frac{U'D'}{\nu} = 2 \frac{A}{\nu}, \quad S = \frac{U'T'}{D'} = \pi \frac{A}{D'} \quad (20)$$

ここに、 U' : 振動流の最大流速, D' : 円柱の直径 ($D = 2R$), T' : 振動流の周期である。計算条件を表-1に示した。計算は、 $Re \approx 800$ 程度で $S = 4.0, 8.0$ の2通りについて行った。表中 MM, NN, NT はそれぞれ、 θ, r 方向の分割数と、一周期間の時間方向分割数である。

図-2および図-3はそれぞれCASE-(2)の場合の渦度 ω 、流れ関数 ϕ の Contour 図であり、これらの

表-1 計算条件 $r_{\max} = 2.7, b = 3$

CASE	MM	NN	NT	A	ν	S	Re	cycles
(1)	64	64	16000	1.274	0.00325	4.0	784	6
(2)	64	64	16000	2.55	0.00637	8.0	800	6

図より、剥離渦の生成状況と流れの場の対応が良く分かる。図-2、3の中の(a)~(h)までの8個の図は、前半の4個が振動流方向正の場合の(a) $2\pi \cdot 1/8$ (b) $2\pi \cdot 2/8$ (c) $2\pi \cdot 3/8$ および(d) $2\pi \cdot 4/8$ の位相における図であり、(e)~(h)は振動流方向が逆向きの際の同様の図である。また、振動流方向が正と負の場合で渦度の図は上、下対称の状態となっていて ϕ の場合も同様の図となっていることから振動流発生から6周期目では、ほぼ流れの場の構造は定常状態に達しているものと考えられる。つぎに、図-4および図-5はそれぞれ同じCASE-(2)の圧力場およびエネルギー損失量 E_T のContour 図を示したものであり、図-4と図-5あるいは、図-2、3などと比較してみると、圧力が強く作用している領域(渦度も大きく、渦の発生がある領域)におけるエネルギーの損失量が大きい事が良く対応して現れている事が分かる。

また、図-6および図-7は CASE-(1)の $A = 1.274$ ($S = 4.0$) の場合の圧力場およびエネルギー損失量 E_T のContour 図を示したものである。

図より剥離が弱く、円柱表面の極近くにのみ剥離渦が生じるような場合は圧力は、ほとんどポテンシャル流の場合の圧力場に近い分布状態となっている。また、エネルギー損失量 E_T の値も(a), (b)あるいは(e), (f)の位相において、円柱表面の極く近傍でエネルギー損失が若干起っている状態となっている。

図-8および図-9はそれぞれ一周を8分割した各時間における、エネルギー損失量 Q の r 方向分布を示したもので図-8はCASE-(1)、図-9はCASE-(2)の場合である。この場合の Q の値は各メッシュ上の r の値に対してエネルギー損失量 E_T を θ 方向に加算した値である。

つぎに、図-8 (CASE-(1), $A = 1.274$) をみるとストローハル数 S が小さく、剥離の程度が小さい場合は、円柱表面付近にエネルギー損失の値がやや大きく現れ、また、エネルギー損失量の r 方向分布の値は最大流速時の(b), (f)に大きくなり、停止時の(d), (h)に小さくなっているのが見られる。

これに対して、図-9 (CASE-(2), $A = 2.55$) の場合は円柱表面付近では Q の値小さく、むしろ円柱表面より離れた r が大

きい領域にQのピークが現れるような分布形を示している。また、ピークの値は、(a)～(h)を見ると、(h)がやや小さい他は時間変化に対してほぼ同様の値を示していると言える。ただし、Qのスケールは、CASE-(1)、CASE-(2)についてそれぞれ実際のQの値の $Q \times 5$ 倍、および $Q \times 0.2$ 倍で描いている。図-10および図-11について説明すると、それぞれの図は、ポテンシャル流の圧力を細かい実線、剥離を伴う流れの場合の円柱表面に働く圧力とせん断力を太い実線および細い破線とし、また、圧力とせん断力を加えたものを太い一点鎖線、それにエネルギー損失量 E_0 を太い実線（負の値）で描き、それぞれの値の一周期に渡った時間変化を示したものである。図-10は、CASE-(1)の場合でストローハル数 $S (=1.274)$ の小さいときであり、図-11は、CASE-(2)でやや剥離が大きく発生し、 $S (=2.55)$ の若干大きい場合である。

ここで、圧力およびせん断力に関しては円柱表面に作用する力を円柱のまわり $\theta=0 \sim 2\pi$ まで積分した値でありエネルギー損失量 E_0 は単位時間当たりの損失量を表し、 E_r を r 方向に関して平均した平均値を円柱のまわり $\theta=0 \sim 2\pi$ まで積分したものである。図-10、11より E_0 の値は振動流の加速時～最大流速の間で最大となる傾向があり、また、 $t=\pi$ の停止時には剥離が小さいCASE-(1)の場合はほとんど零を示しているが、剥離が大きく伴ってくると零とはならずかなりの損失量を示すようになると思われる。これは、停止時においても渦の存在があるためと考えられる。また、CASE-(2)のように E_0 が大きいときはポテンシャル流($E_0=0$)の圧力変化とは位相差が大きく現れているのが分かる。今度はストローハル数 S のさらに大きい場合も計算を行い圧力変化および位相差に対する剥離渦の影響を詳細に調べる必要があると考える。

<参 考 文 献>

- 1) 佐藤幸雄・折橋恒春・浜中建一郎；剥離を伴った振動流中の円柱に働く流体力について
第40回海岸工学論文集(Ⅱ) p.856～860
- 2) 佐藤幸雄・浜中建一郎・千葉俊夫；振動流中の円柱に加わる圧力について
土木学会北海道支部論文報告集 第49号 p.705～710

図-2 渦度の Contours
(CASE-(2))

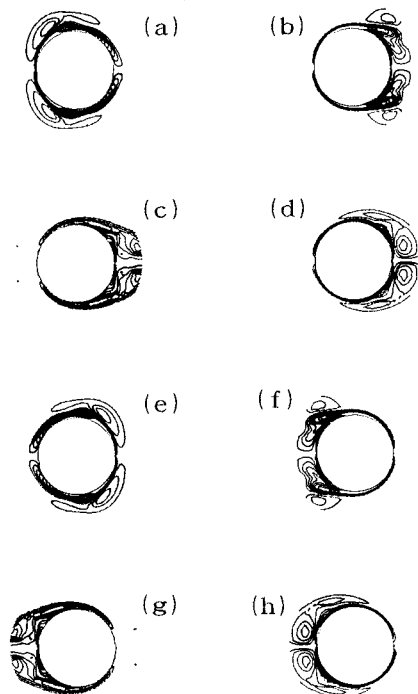


図-3 流れ関数の Contours
(CASE-(2))

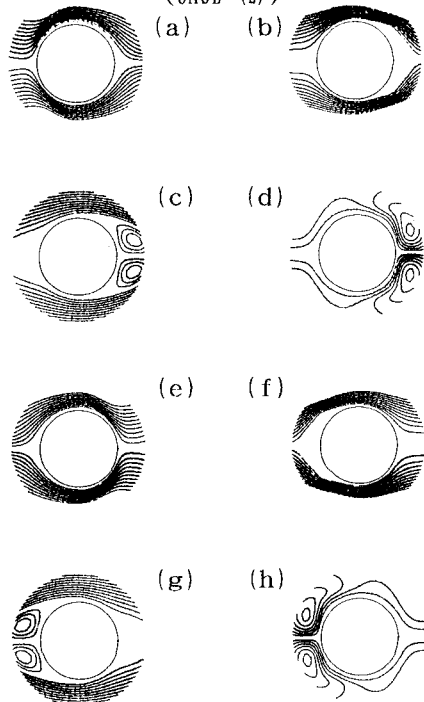


図-4 圧力場の Contours
(CASE-(2))

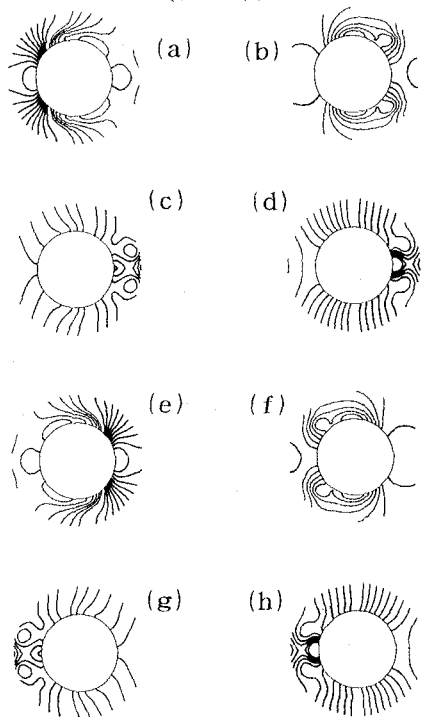


図-6 圧力場の Contours
(CASE-(1))

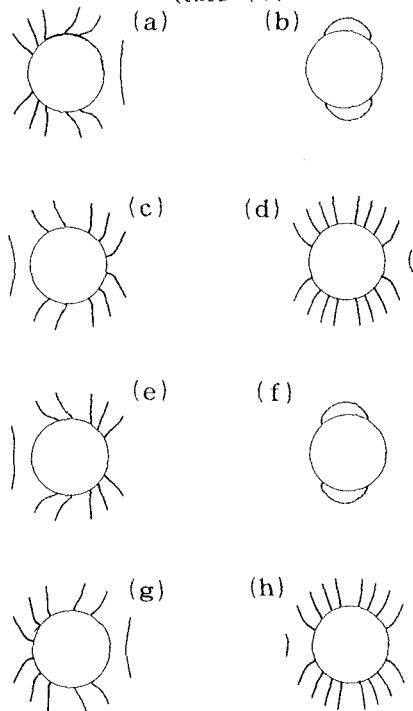


図-5 エネルギー損失量
の Contours (CASE-(2))

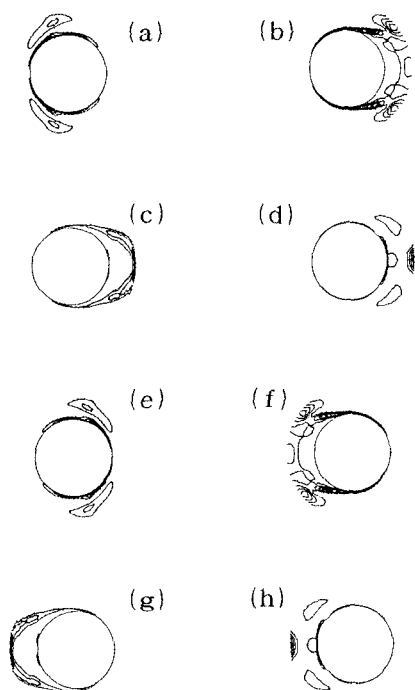


図-7 エネルギー損失量
の Contours (CASE-(1))

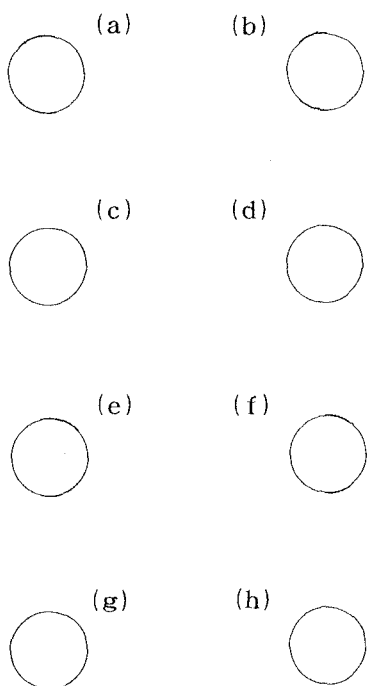


図-8 エネルギー損失量の分布
(CASE-(1))

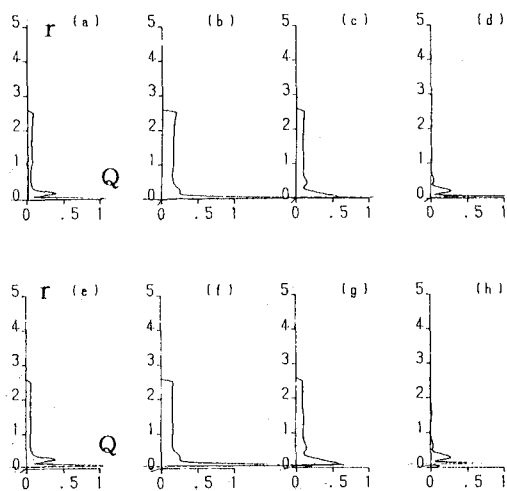


図-9 エネルギー損失量の分布
(CASE-(2))

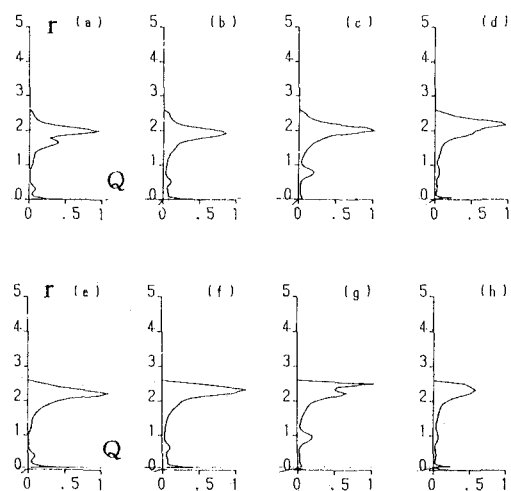


図-10 (CASE-(1))

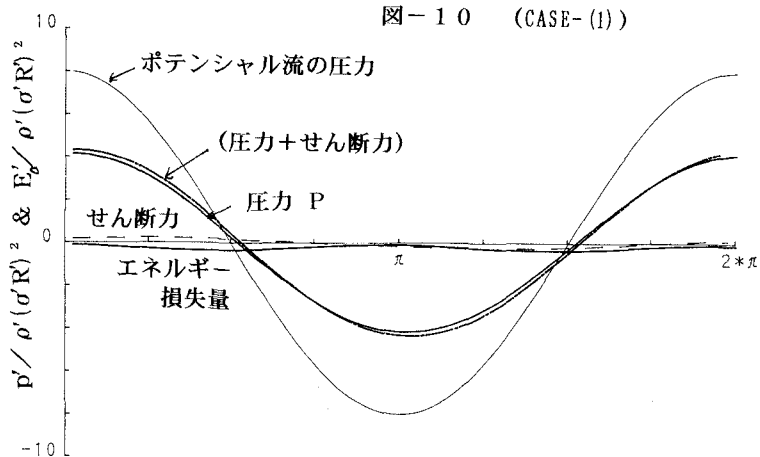


図-11 (CASE-(2))

