

単体構造物の回りの波の3次元変形

北海道大学工学部 学生員 金戸 俊道

北海道大学工学部 正会員 浜中 建一郎

1. はじめに

構造物を過ぎる波の変形、及び構造物に働く力を解析する方法として、グリーンの公式を用いた方法がよく使われる。この方法はさらに、主要解を用いる方法と、グリーン関数を用いる方法に大別され、前者に関しては、断面2次元問題を例にとり種々検討が加えられている(折橋・浜中(1992)、折橋・浜中(1993))。

一方、3次元問題については、計算機のメモリーやコストの点から、グリーン関数を用いる方法が圧倒的に有利であると考えられているが、現在唯一知られているJohn (1978)によるグリーン関数は収束性に問題があり、その点を解決した修正グリーン関数が折橋・浜中(1994)によって提案されているものの、実際問題に対する適用に関しては現在研究中である。

このことから本研究では、構造物の回りの波の3次元変形問題を主要解をもちいて解く方法を検討することを目的とする。その際、構造物を取り囲む仮想境界面上での境界条件として、回折散乱波を考慮する方法、及びしない方法、又、幅の狭い水路での波の3次元変形を解く方法等について検討を加える。

2. 理論及び計算方法

進行波によって水中構造物に働く力を求めたい。そのために、グリーンの公式を用いた解析方法によりポテンシャルを計算する。

2. 1 グリーンの公式

3次元の時間的に振動するポテンシャル解を仮定する。

$$\phi = \phi e^{-i\sigma t} \quad \dots\dots(1)$$

全ての変量を周波数 σ と重力加速度 g で無次元化する。

$$(x, y) = (x', y') \sigma^2 / g$$

$$t = \sigma t'$$

$$\phi = \sigma^3 / g \phi'$$

$$k = g / \sigma^2 k'$$

$$\text{分散関係 } 1 = k \tanh k h$$

ここで記号" ' "は有次元量を表す。

ポテンシャルの空間分布は、3次元ラプラス方程式を満たす。

$$\Delta \phi = 0 \quad \dots\dots(2)$$

領域内の点をP、境界上の点をQとし2点間の距離を r とすると、(2)式の主要解 $1/r$ を用いて、グリーンの公式から領域内のポテンシャルは

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \quad n: \text{境界の外に向かう法単位ベクトル} \quad \dots\dots(3)$$

P点が境界上にあるときは、Q'で表すと、

$$\phi(Q') = \frac{1}{2\pi} \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} - \phi(Q) \frac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) dS \quad \dots\dots(4)$$

ただし、 $(\partial/\partial n)$ は、境界上で領域内から外側に向かう微分を表す。

3-dimensional wave deformation around a structure
by Toshimichi KANETO and Ken-ichiro HAMANAKA

P点を境界上にとり境界SをN個の微小区分に分割し、離散化すると

$$\phi_i = \sum_{j=1}^N \{E_{ij} \bar{\phi}_j - \bar{E}_{ij} \phi_j\} \quad \dots\dots(5)$$

ここで、記号“ $\bar{}$ ”はそのn方向の微係数を表す。 E_{ij} は主要解のj区間積分で、 $\bar{E}_{ij}$ は主要解の微係数の積分を表し、

$$i \neq j \quad E_{ij} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \Delta s_j, \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\partial n} \left(-\frac{1}{r} \right) \Delta s_j \quad \dots\dots(6)$$

$$i = j \quad E_{ij} = \frac{1}{2\pi} \Delta s_j, \quad \bar{E}_{ij} = 0 \quad \dots\dots(7)$$

である。ここで Δs_j は分割要素の面積。

2. 2. 1 散乱波を考慮しない方法

底面、構造物表面、自由水面、仮想境界の順に1から7の番号をつける。

仮想境界が構造物から十分離れているとすると、散乱波は減衰し入射波だけとなる。

境界条件を考える。

境界1、2(底面と構造物表面)

$$\bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots(8)$$

境界3(自由水面)

微小振幅の仮定を用いて

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \eta: \text{波高} \quad \dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta = 0 \quad \dots\dots(10)$$

(9)、(10)式に $\Phi = \phi e^{-it}$ を代入すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi, \quad \bar{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi \quad \dots\dots(11)$$

境界4, 5, 6, 7(仮想境界)

入射波のポテンシャルは

$$\phi = e^{ikx} A(z) \quad \dots\dots(12)$$

$$\text{と表せる。ここで } A(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad \dots\dots(13)$$

従って、それぞれの境界で ϕ と $\bar{\phi}$ を求め、(5)式に代入すると未知数 ϕ_i に対して連立一次方程式を構成し解くことができる。

2. 2. 2 散乱波を考慮する方法

2. 2. 1で示した散乱波を考慮しない方法では、仮想境界を散乱波が十分に減衰し、その影響が無くなる距離まで離さなければならず未知数の数が多くなる。そこで、散乱波を考慮に入れると境界を狭くとることができ必然的に未知数を減らす事ができる。

まず、散乱波のポテンシャルを考える。

3次元ラプラス方程式

$$\Delta \phi = 0$$

を円柱座標表示すると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots(14)$$

変数分離法を用いて

$$\phi = \phi_s(r, \theta) Z(z) \quad \dots\dots (15)$$

と表し、(15)式を(14)に代入すると

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - C Z = 0 \quad \dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_s}{\partial \theta^2} + C \phi_s = 0 \quad \dots\dots (17)$$

(16), (17)の2式が導かれる。ここで $C = k^2$ である。

水底での境界条件を満たすため

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh k h} \quad \dots\dots (18)$$

水面での境界条件を満たすため

$$k \tanh k h = 1 \quad \dots\dots (19)$$

一方 ϕ_s を次のように仮定する。

$$\phi_s = \sum R_m(r) e^{i m \theta}$$

これを(21)式に代入すると、それぞれの R_m に対し次式が成り立つ。

$$\frac{\partial^2 R_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_m}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R_m = 0 \quad \dots\dots (20)$$

この式は、 m 次の Bessel 方程式でその一般解は

$$R_m(r) = C_m H_m^{(1)}(k r) + D_m H_m^{(2)}(k r) \quad \dots\dots (21)$$

である。ここで C_m, D_m は積分定数、 $H_m^{(1)}, H_m^{(2)}$ は各々 m 次の第一種、第二種 Hankel 関数である。

Hankel 関数は、 $k r$ が十分大きいときは

$$H_m^{(1)}(k r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp\left\{i\left(k r - \frac{m \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \dots\dots (22)$$

$$H_m^{(2)}(k r) = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp\left\{-i\left(k r - \frac{m \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad \dots\dots (23)$$

となり、はじめに $\phi = \phi e^{-i t}$ と仮定していたから、(22)式は外に広がる波、(23)式は中心に集まる波を表し、ここでは(22)式だけが意味をもつ。

また、Hankel 関数に対称性がある場合は、 $e^{i m \theta} = \cos m \theta + i \sin m \theta$ で必要なのは $\cos m \theta$ だけであるから、これらの結果より散乱波のポテンシャルは

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m H_m(k r) \cos m \theta A(z) \quad \dots\dots (24)$$

(24)式をもちいてそれぞれの境界で $\phi, \bar{\phi}$ を求めて結果を(5)式に代入すると、未知数 ϕ_i, C_m に対して連立一次方程式を構成し解くことができる。

2. 2. 3 幅の狭い水路による3次元変形計算

境界を定める。1. 底面 2. 構造物表面 3. 自由水面 4. 左面 5. 右面 6. 前面 7. 後面の順に1から7の番号をつける。また、水路の半幅を b とする。

仮想境界4, 5でのポテンシャルを考える。

ポテンシャルの空間分布は

$$\Delta \phi = 0 \quad \dots\dots (25)$$

であり、これに変数分離した

$$\phi = \phi_h(x, y) Z(z) \quad \dots\dots (26)$$

を代入すると

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - C Z = 0 \quad \dots\dots (27)$$

$$\Delta_h \phi_h + C \phi_h = 0 \quad \dots\dots (28)$$

の2式が導かれる。

ここで $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。

Zと分散関係式は前章と同様になる。

さらに(27)式から

$$\Delta_h \phi_h + k^2 \phi_h = 0 \quad \dots\dots (30)$$

上下流の仮想境界の外側では、平面進行波としての入、反射波、通過波と、水路幅で振動する成分が考えられる。水路幅で振動する成分を次のように仮定する。

$$\phi_b = \sum_{m=1}^m a_m \exp(i \mu_m x) \cos(\nu_m y) \quad \dots\dots (31)$$

ここで $\nu_m = \frac{m\pi}{b}$ とする。

これを、(5)に代入すると各々のm成分ごとに

$$-\mu_m^2 a_m \exp(i \mu_m x) \cos(\nu_m y) - \nu_m^2 a_m \exp(i \mu_m x) \cos(\nu_m y) + k^2 a_m \exp(i \mu_m x) \cos(\nu_m y) = 0 \quad \dots\dots (32)$$

従って

$$\mu_m^2 = k^2 - \nu_m^2 \quad \dots\dots (33)$$

水路幅bは入射波の波長より十分短いから $k < \nu_m$ である。従って、 μ_m は純虚数。上下流両域とも離れるに従って、減衰する方の符号をとる。以上の結果をまとめてそれぞれの境界で ϕ 、 ϕ を求めて(5)式に代入すると、未知数 $\phi_i, a_m, b_m, a_r, a_t$ について連立一次方程式を構成し解くことができる。

3. 実験

図1に実験水路の略図を示す。境界2は構造物、境界4は上流側、境界5は下流側、境界6, 7は側壁である。実験では波によって構造物に働く鉛直力、水平力、モーメントを計測している。実験条件は表1に示す。

4. 実験結果と解析の比較

実験は幅80cmの長方形水路のものであるが、解析は仮想境界間の距離が構造物の長さDBの3倍である正方形領域で行った。また、本解析では、散乱波を考慮しない方法をとった。分割数は分割要素が正方形になるように定めた。結果を図2から7に示す。図2, 3, 4は水深が0.667m、図5, 6, 7は0.833mである。縦軸は図2, 5では鉛直力(FZ)、図3, 6では水平力(FX)、図4, 7ではモーメント(M)をとり、横軸は構造物の長さで波長の比をとっている。□は実験値の正の最大値、◇は実験値の負の最大値の絶対値、×は解析値を表している。また、図中のFZ, FX, Mは全て無次元化された値であり、その式は $FZ = FZ' \rho g^4 / \sigma^6$, $FX = FX' \rho g^4 / \sigma^6$, $M = M' \rho g^5 / \sigma^6$ で表される。

CASE3, 4は碎波しているため実験値に近い値が得られていないが、他のCASEは非碎波であり、ほぼ実験値に近い値が得られているので本解析は妥当であるといえる。

今後は、散乱波を考慮する方法、幅の狭い水路を考慮する方法も調べ、より正確な解析値が得られるよう検討していく。

実験条件	H	D	DH	DV	T
CASE 1	0.667	0.15	0.2	0.033	1
CASE 2	0.667	0.15	0.3	0.033	1
CASE 3	0.667	0.15	0.4	0.033	1.2
CASE 4	0.667	0.15	0.5	0.033	1.4
CASE 5	0.833	0.32	0.2	0.033	1.4
CASE 6	0.833	0.32	0.3	0.033	1.2
CASE 7	0.833	0.32	0.4	0.033	1
CASE 8	0.833	0.32	0.5	0.033	1.2

表1 実験条件

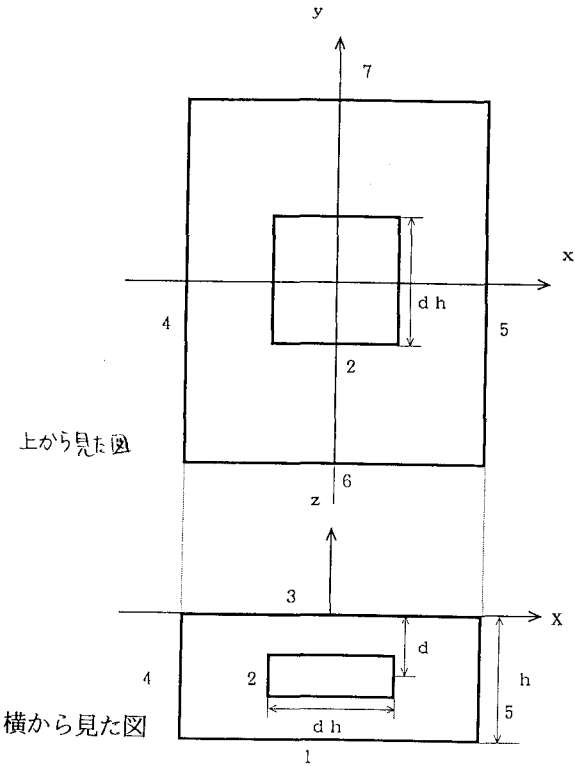


図1 実験水路

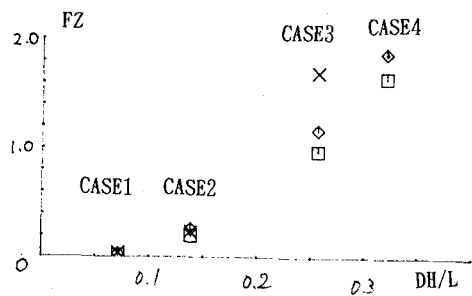


図2 鉛直方向の力CASE1~4

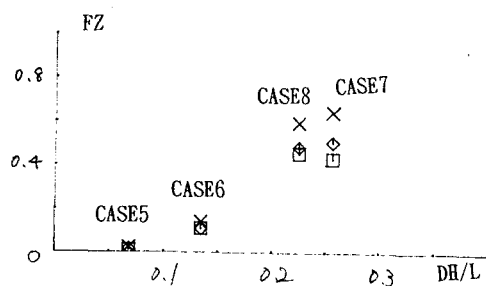


図3 鉛直方向の力CASE5~8

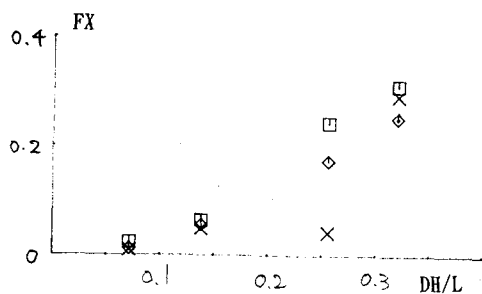


図4 水平方向の力CASE1~4

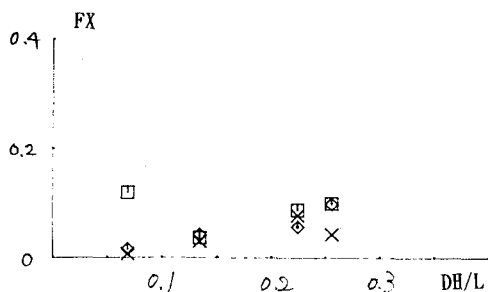


図5 水平方向の力CASE5~8

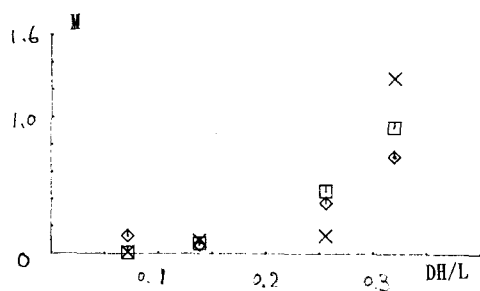


図6 モーメントCASE1~4

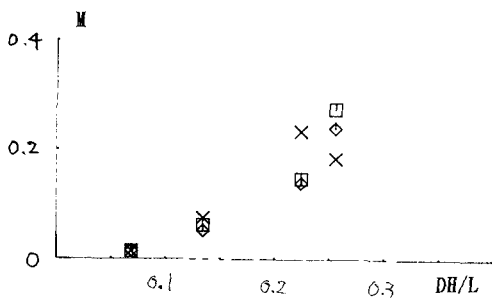


図7 モーメントCASE5~8

参考文献

- 折橋・浜中(1992): 没水形水平構造物をよぎる波, 土木学会道支部論文報告集, 第49号、頁697~700
- 折橋・浜中(1993): グリーンの公式を用いた没水形構造物を過ぎる波の解析
第48回土木学会年講, 頁792~793
- 折橋・浜中(1994): 水中構造物を過ぎる波, 土木学会道支部論文報告集、第50号(印刷中)
- John, F. (1950) : On the motion of floating bodies II. simple harmonic motion, Comm. Pure Appl. Math vol3, 45-101