II－63

水面形に合わせた座標系による孤立波の解析

北海道大学工学部　学生員　二本柳　昌　哉
北海道大学工学部　正　員　　森　　明　巨
北海道大学工学部　正　員　板　倉　忠　興

1. はじめに

著者ら[1)]は矩形断面直線水路の実験から、波状跳水と乱流境界層の相互干渉が跳水の波高を著しく増加させることを見いだした。このときの跳水第一波の波形は孤立波で近似できた。しかし、波高水深比は1.2で理論的に予測される孤立波の限界波高の約1.5倍にもなり、E.V.Laitone[2)]の孤立波理論を適用すると、流速分布は実測値と大きく異なるものとなった。これは水面の条件を適用するのに未攪乱水面から摂動展開したためと考えられる。本研究ではこの誤差を除くために、水面形に合わせた座標形を用いて孤立波の解析を行うことにした。解析手法は一般座標系に関わるもの以外はLaitoneの方法と同じである。

2. 基礎方程式の誘導

基礎方程式は(1)～(3)式である（テンソル記号は慣用のものを用いる）。

連続式　：　$$\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\,\mathrm{v}^i\right)_{,i}=0 \tag{1}$$

運動方程式　：　$$\mathrm{v}^i\mathrm{v}^i{}_{,j}+\left\{\begin{matrix} i \\ j\ k\end{matrix}\right\}\mathrm{v}^i\mathrm{v}^k=\frac{1}{\rho}g^{ij}p_{,j} \tag{2}$$

非回転の条件　：　$$\mathrm{v}_{i,j}=\mathrm{v}_{j,i} \tag{3}$$

ここに、ρ　：密度、$p=\tilde{p}+\rho g z$　、$\tilde{p}$　：圧力、 g　：重力の加速度

座標系を次のようにとる。

$$y^1=\lambda x^1 \quad , \quad y^2=x^2 \quad , \quad y^3=h x^3 \tag{4}$$

ここに、h　：水深、λ　：x　方向の特性長、y^i　：Cartecian座標系、x^i　：水面に合った座標系、$i=1$　：流下方向、2　：横断方向、3　：鉛直上向き方向である。河床を　$x^3=0$　、水面を　$x^3=1$　にとる。以下では簡単のため　$x^1=x$　、$x^3=z$　と書く。また、y^2　方向に場は一様である。

このとき、(1)～(3)式は、(5)～(8)式となる

連続式　：　$$(h\mathrm{v}^1)_{,1}+h\mathrm{v}^3{}_{,3}=0 \tag{5}$$

運動方程式

x　方向　：　$$\mathrm{v}^j\mathrm{v}^1{}_{,j}=-\frac{1}{\lambda^2}p_{,1}+\frac{h_{,1}z}{\lambda^2 h}p_{,3} \tag{6}$$

z　方向　：　$$\mathrm{v}^j\mathrm{v}^3{}_{,1}+\frac{h_{,11}}{h}z\mathrm{v}^1\mathrm{v}^1+2\frac{h_{,1}}{h}\mathrm{v}^1\mathrm{v}^3 =-\left[\frac{1}{h^2}+\left(\frac{h_{,1}z}{\lambda h}\right)^2\right]p_{,3}+\frac{h_{,1}z}{\lambda^2 h}p_{,1} \tag{7}$$

Analysis of Solitary Wave in Generalized Coordinate Fitting Wave Hight
by Masaya NIHONYANAGI, Akio MORI, Tadaoki ITAKURA

非回転の条件　：$[\lambda^2+(h_{,1}z)^2]v^1_{,3}+2h^2_{,1}zv^1+hh_{,1}zv^3_{,3}+hh_{,1}v^3 = hh_{,1}zv^1_{,1}+(hh_{,1})_{,1}zv^1+h^2v^3_{,1}+2hh_{,1}v^3$ (8)

境界条件は、

$$\begin{aligned} &v^3=0 && at && z=0 \text{ and } 1 \\ &h=d && when && |x|\to\infty \\ &p=\rho g h && at && z=1 \end{aligned} \tag{9}$$

ここに、d ：$|x|\to\infty$ の水深。

v^1 , v^3 , h , p を以下のように無次元化する。

$$U=\frac{\lambda}{\sqrt{gd}}v^1 \quad , \quad W=\frac{hd}{\sqrt{gd}\,\lambda}v^3 \quad , \quad H=\frac{h}{d} \quad , \quad P=\frac{p}{\rho g d} \tag{10}$$

これらを用いると(5)～(8)式および境界条件は以下のようになる。

$$\sigma(HU)_{,1}+W_{,3}=0 \tag{11}$$

$$\sigma HUU_{,1}+WU_{,3}=\sigma[-HP_{,1}+H_{,1}zP_{,3}] \tag{12}$$

$$HWW_{,3}+\sigma[HUW_{,1}+H_{,1}UW+P_{,3}] + \sigma[HH_{,11}zU^2+H_{,1}z^2P_{,3}-HH_{,1}zP_{,1}] \tag{13}$$

$$U_{,3}+HH_{,1}zW_{,3}-HH_{,1}W-H^2W_{,1} = \sigma[-H^2_{,1}zU_{,3}-H^2_{,1}zU+HH_{,1}zU_{,1}-HH_{,11}zU] \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &W=0 && at && z=0 \text{ and } 1 \\ &H=1 && when && |x|\to\infty \\ &P=H && at && z=1 \end{aligned} \tag{15}$$

ここに $\sigma=\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$ であり、H,U,W,P を以下のようにσ で展開する。

$$H=H_0+\sigma H_1+\sigma^2H_2+\sigma^3H_3+\cdots\cdot \tag{16}$$

$$U=U_0+\sigma U_1+\sigma^2U_2+\sigma^3U_3+\cdots\cdot \tag{17}$$

$$W=W_0+\sigma W_1+\sigma^2W_2+\sigma^3W_3+\cdots\cdot \tag{18}$$

$$P=P_0+\sigma P_1+\sigma^2P_2+\sigma^3P_3+\cdots\cdot \tag{19}$$

3. 摂動展開

(16)～(19)式を(11)～(14)式に代入して σ の各オーダーごとにまとめる。

0次のオーダー

(11)、(14)式から

$W_0=0$ (20)、 $U_0=U_0(x)$ (21)

1次のオーダー

(11)式を z で積分すると(22)式となり、$z=0$, 1 のとき $W=0$ であることから(23)式が得られる。

$(H_0U_0)_{,1}z+W_1=0$ (22)、 $H_0U_0=const$, $W_1=0$ (23)

(12)、(13)式から(24)、(25)式が得られる。

$P_0=P_0(x)=H_0(x)$ (24)、 $H_0U_0U_{0,1}=-H_0P_{0,1}$ (25)

(23)～(25)式から H_0 , U_0 は常数であり、

$H_0=1$ (26)、 $P_0=1$ (27)、 $U_0=const$ (28)

である。H_0 は無限遠で $H=1$ であることから、$H_0=1$ とした。(24)式から $P_0=1$ となる。
(14)式から、U_1 は x のみの関数となる。

$$U_1=f(x) \tag{29}$$

2次のオーダー

(11)式から、(22)、(23)式と同様にして、(30)、(31)式が得られる。

$$(f+H_0U_0)_{,1}z+W_2=0 \tag{30}$$

$$f+H_1U_0=const=c_1 \quad , \quad W_2=0 \tag{31}$$

(12)および(13)式から

$$P_1=P_1(x)=H_1(x) \qquad (32)、\quad U_0f_{,1}=-P_{1,1} \tag{33}$$

(32)、(33)式から $H_1=const-U_0f$ が得られるが、これと(31)式とを比較すると(34)、(35)式が得られる。

$$U_0=1 \qquad (34)、\quad P_1=H_1=c_1-f \quad , \quad c_1=const \tag{35}$$

(14)式から(36)式が得られる。

$$U_2=-\frac{z^2}{2}f_{,11}+r(x) \tag{36}$$

3次のオーダー

(11)式から

$$[U_2+(c_1-f)f+H_2]_{,1}+W_{3,3}=0 \tag{37}$$

これに、(36)式を代入し、z で積分すると

$$-\frac{z^3}{6}f_{,111}+[r(x)+(c_1-f)f+H_2]_{,1}z+W_3=0 \tag{38}$$

が得られる。$z=1$ のとき $W=0$ であるから

$$r(x)=\frac{1}{6}f_{,11}+f^2-c_1f-H_2+c_2 \qquad (\ c_2 \text{ は積分定数}) \tag{39}$$

となる。これを、(36)、(38)式に代入すると、

$$U_2=\left(\frac{1}{6}-\frac{z^2}{2}\right)f_{,11}+f^2-c_1f-H_2+c_2 \tag{40}$$

$$W_3=\frac{z(z^2-1)}{6}f_{,111} \tag{41}$$

が得られる。(13)式は(42)式となり、これを z で積分して(43)式が得られる。

$$P_{2,3}+(c_1-f)_{,11}z=0 \qquad (42)、P_2=\frac{z^2-1}{2}f_{,11}+H_2 \tag{43}$$

(12)式は(44)式となる。

$$U_{2,1}=-P_{2,1}-ff_{,1} \tag{44}$$

これに、(41)、(44)式を代入して x で積分し、$|x|\to\infty$ のとき $f\to c_1$ $(H_1\to 0)$ を用いると、KdV方程式(45)が得られる。

$$f_{,11}-\frac{9}{2}f^2+3c_1f+\frac{3}{2}c_1^2=0 \tag{45}$$

(13)式は(46)式となり、これに、(41)式を代入し z で積分すると、(47)式が得られる。

$$U_{3,3}-W_{3,1}=(-2f_{,1}^2-c_1f_{,11}+H_{2,11})z \tag{46}$$

$$U_3=\frac{z^2}{12}\left(\frac{z^2}{2}-1\right)f_{,1111}+\frac{z^2}{2}(-2f_{,1}^2-c_1f_{,11}+H_{2,11})+s(x) \tag{47}$$

4次のオーダー

(11)式は $z=1$ で $W_4=0$ となる条件から

$$-\frac{7}{360}f_{,1111}+\frac{1}{6}(-2f_{,1}^2-c_1 f_{,11}+H_{2,11})+H_2 f \\ +H_3+s+(c_1-f)(f^2-c_1 f-H_2+c_2)=const \tag{48}$$

(12)、(13)式は、

$$U_{3,1}+c_1 U_{2,1}+U_2 f_{,1}+(c_1-f)ff_{,1}+P_{3,1} \\ +(c_1-f)\left(H_{2,1}+\frac{z^2-1}{2}f_{,111}\right)+z^2 f_{,1}f_{,11} \tag{49}$$

$$P_3=H_3-\frac{(z^2-1)^2}{24}f_{,1111}+\frac{z^2-1}{2}[-H_{2,11}+(c_1+f)f_{,11}+f_{,1}^2] \tag{50}$$

(47)～(50)式および(40)式から、H_2 に関する微分方程式(51)が得られる。

$$\frac{1}{3}H_{2,11}+(c_1-3f)H_2=\frac{1}{45}f_{,111}+\frac{4}{3}c_1 f_{,11}+\frac{1}{3}f_{,1}^2 \\ -f^3+\left(\frac{c_1^2}{3}-c_2\right)f+\frac{c_1}{3}(2c_1^2-3c_2) \tag{51}$$

4. おわりに

水面に合わせた座標系を用いて、一次のオーダーのKdV方程式と二次のオーダーの微分方程式を導いた。

参考文献

1)森明巨、板倉忠興、森平宏治、高田修二：跳水と境界層の相互干渉－三次元波状跳水，水工学論文集第36巻，1992.2

2)E.V.Laitone:The second approximation to cnoidal and solitary waves,J.Fluid Mechi,vol.9,1961