

II-55

蛇行河道における水制の効果に関する研究

北海道大学大学院 学生員 山田 浩次

北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男

北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

水制は、蛇行水路や砂州形成河道で水はねや土砂堆積をねらって設置される。水制の効果に関しては、数値計算によってかなり再現されているが、一方解析的な研究はほとんど無い。そこで本研究では蛇行水路において、水深方向平均流速を用いた浅水流モデルで水制を設置した場合の解析を行った。解析にあたり、水制によって水路の粗度が増加したとみなし、水制の働きを粗度の増加で置き換えて二重フーリエ級数で与えて計算した。その結果を蛇行水路流れの計算と重ね合わせて水制の水はね、堆積効果の評価を試みた。

2. 蛇行流路の浅水流モデルの基礎方程式

座標系を図-1のように流路の中央線に沿って $\tilde{s}$ 軸、これに直交するように $\tilde{n}$ 軸をとると、 $\tilde{s}$ 、 $\tilde{n}$ 方向の運動方程式および流れの連続式はそれぞれ次のように与えられる。

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{s}} + \left(1 + \frac{\tilde{n}}{r}\right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{r} + g \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{s}} - S \right) + \left(1 + \frac{\tilde{n}}{r}\right) \frac{\tilde{\tau}_s}{\rho \tilde{h}} = 0 \quad (1)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{s}} + \left(1 + \frac{\tilde{n}}{r}\right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{n}} - \frac{\tilde{u}^2}{r} + \left(1 + \frac{\tilde{n}}{r}\right) \left\{ g \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\tilde{\tau}_n}{\rho \tilde{h}} \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{s}} (\tilde{h} \tilde{u}) + \left(1 + \frac{\tilde{n}}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} (\tilde{h} \tilde{v}) + \frac{\tilde{h} \tilde{v}}{r} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{u}$ 、 $\tilde{v}$ はそれぞれ $\tilde{s}$ 、 $\tilde{n}$ 方向の流速であり、式中の記号の上の横棒は水深平均を表す。 $\tilde{h}$ は水深、 $\tilde{\xi}$ は水面の変位量、 S は平均水路勾配、 g は重力加速度、 r は水路中央の曲率半径、 $\tilde{\tau}_s$ 、 $\tilde{\tau}_n$ はそれぞれ $\tilde{s}$ 、 $\tilde{n}$ 方向の底面せん断力、 ρ は水の密度である。また $\tilde{u}^2 = \tilde{u}^2$ 、 $\tilde{v}^2 = \tilde{v}^2$ 、 $\tilde{u} \tilde{v} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$ と近似してある。抵抗則は式(4)に、河床せん断力の配分は式(5)によるものとした。

$$\phi = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}_*} = 6.9 \left(\frac{\tilde{h}}{\tilde{d}} \right)^{1/8} \quad (4)$$

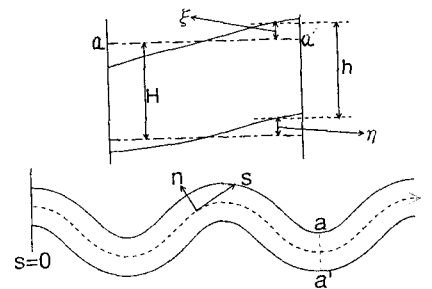
$$\tilde{\tau}_x = \tilde{\tau}_B \frac{\tilde{u}}{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}, \quad \tilde{\tau}_y = \tilde{\tau}_B \frac{\tilde{v}}{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}} \quad (5)$$

ただし、 $\tilde{d}$ は河床材料の粒径

ここで、水制による粗度の増加を表す関数 f_s を流速係数 ϕ_F の中に含ませると式(6)のようになり、それによってせん断力を式(7)のように置き換えることができる。

$$\Phi = \phi (1 - \delta f_s(s, n)) = \phi_0 h^{1/8} (1 - \delta f_s(s, n)) \quad (6)$$

図-1 座標系と記号



Study on effects of spur dikes on meandering channel

by Koji YAMADA, Mikio KUROKI, Tadaoki ITAKURA

ただし δ は各水理量の変動成分（後述）と同じオーダーの定数。

$$\begin{aligned}\tau_B &= \frac{\rho u_*'^2}{\rho U^2} = \frac{u_*'^2}{U^2} u^2 = \phi_0^{-2} u^2 = \phi_0^{-2} h^{-\frac{1}{3}} u^2 (1 + 2\delta f_s) \\ &= \phi_0^{-2} (1 + 2u') \left(1 - \frac{1}{3}h'\right) (1 + 2\delta f_s)\end{aligned}\quad (7)$$

基礎式(1', 2', 3')を平均水深 H と平均流速 U （せん断力は ρU^2 ）を用いて無次元化し、式(7)でせん断力を置き換えると、以下ようになる。

$$F^2 \left\{ u \frac{\partial u}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{uv}{r} \right\} = S - \frac{\partial \xi}{\partial s} - \left(1 + \frac{n}{r}\right) F^2 h^{-\frac{4}{3}} u^2 \phi_0^{-2} (1 + 2\delta f_s(s, n)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned}F^2 \left\{ u \frac{\partial v}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{u^2}{r} \right\} \\ = - \left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{\partial \xi}{\partial n} - \left(1 + \frac{n}{r}\right) F^2 h^{-\frac{4}{3}} uv \phi_0^{-2} (1 + 2\delta f_s(s, n))\end{aligned}\quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (hu) + \left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{\partial}{\partial n} (hv) + \frac{hv}{r} = 0 \quad (10)$$

ここで、変量を平均量とそれからの変動量に分離して、以下の式のように表す。

$$u = 1 + u', v = 0 + v', h = 1 + h', \eta = 0 + \eta', h' = \xi' - \eta' \quad (11)$$

δ 、プライムの付いた変動量、 $1/r$ のオーダーがおのおの等しいものとし、2 次以上の項を無視して整理すると、0 次と 1 次に関して次のような線形方程式が求められる。

◎ 0 次の式

$$S - F^2 \tau_0 = 0 \quad (12), \quad \tau_0 = \phi_0^{-2} \quad (13)$$

◎ 1 次の式

$$F^2 \frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{\partial \xi'}{\partial s} + S \left(2u' - \frac{4}{3}h' + \frac{n}{r} \right) = -2S\delta f_s(s, n) \quad (14)$$

$$F^2 \frac{\partial v'}{\partial s} - \frac{F^2}{r} + \frac{\partial \xi'}{\partial n} + S v' = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{\partial h'}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial n} = 0 \quad (16)$$

一方、 f_s をフーリエ級数で表すと、以下ようになる。

$$f_s = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} C_{MN} \exp(iM\xi) \exp(iN\zeta) \quad (17)$$

$$\text{ここで、} C_{MN} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi, \zeta) \exp(-iM\xi) \exp(-iN\zeta) d\xi d\zeta \quad (18)$$

$$\xi = \frac{\pi \widetilde{s}}{\widetilde{L}}, \quad \zeta = \frac{\pi \widetilde{n}}{\widetilde{B}}, \quad 2\widetilde{L} : \text{縦断方向の特性長}, 2\widetilde{B} : \text{横断方向の特性長}, (\widetilde{B} \text{ を水路幅に、}$$

$2\widetilde{L}$ を水制設置間隔にとる。)

また、流路の曲率半径は次のように表せる。

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2r_0} \exp(iks) + C.C. \quad (19) \quad \text{ここで } k = \frac{\pi H}{\widetilde{L}}, \quad 1 = \frac{\pi H}{\widetilde{B}}$$

従って、流れは以下の例のようにフーリエ級数で表すことができる。

$$\eta' = \sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta C_{MN} \hat{\eta}_{MN} \exp(iMks) \exp(iNln) + \hat{\eta} \frac{1}{2r_0} \exp(iks) + C.C. \text{ etc.} \quad (20)$$

これを1次の式に代入して得られた式は、 $\sum_{M=-\infty}^{\infty} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta C_{MN} \exp(iMks) \exp(iNln)$ の項は水制の影響による項で、 $\frac{1}{2r_0} \exp(iks)$ の項は流路の蛇行の影響による項である。項ごとに分けた1次の式はそれぞれ以下になる。

(1) 水制の影響による項

$$(2S + iMkF^2) \hat{u}_{MN} + \left(iMk - \frac{4}{3}S\right) \hat{h}_{MN} + iMk \hat{\eta}_{MN} = -2S \quad (21)$$

$$(iMkF^2 + S) \hat{v}_{MN} + iNl \hat{h}_{MN} + iNl \hat{\eta}_{MN} = 0 \quad (22)$$

$$iMk \hat{u}_{MN} + iMk \hat{h}_{MN} + iNl \hat{v}_{MN} = 0 \quad (23)$$

(2) 蛇行の影響による項

$$(2S + ikF^2) \hat{u} + \left(ik - \frac{4}{3}S\right) \hat{\xi} + \frac{4}{3}S \hat{\eta} = -\frac{Sn}{2} \quad (24)$$

$$(ikF^2 + S) \hat{v} + \hat{\xi}_n = \frac{F^2}{2} \quad (25)$$

$$ik \hat{u} + ik \hat{\xi} - ik \hat{\eta} + \hat{v}_n = 0 \quad (26)$$

3, 平衡河床形状の推定について

河床の変形を規定する流砂の連続式については、次のようになる。

$$\frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial \widetilde{t}} - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\widetilde{r}}{\widetilde{r} + \widetilde{n}} \frac{\partial \widetilde{q}_s}{\partial \widetilde{s}} + \frac{\partial \widetilde{q}_n}{\partial \widetilde{n}} + \frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{r} + \widetilde{n}} \right) = 0 \quad (27)$$

ただし、 λ :空隙率、 $\widetilde{q}_s$:s方向の流砂量、 $\widetilde{q}_n$:n方向の流砂量

ここで、無次元量を導入して無次元化をはかる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{r}{r+n} \right) \frac{\partial q_s}{\partial s} + \frac{\partial q_n}{\partial n} + \frac{q_n}{r+n} = 0 \quad (28)$$

ただし $\frac{\widetilde{q}_s}{\widetilde{q}_0} = q_s$, $\frac{\widetilde{q}_n}{\widetilde{q}_0} = q_n$, $\frac{\widetilde{t}}{\widetilde{t}_0} = t$, $\widetilde{q}_0$:平均流砂量, $\widetilde{t}_0 = (1-\lambda) \frac{H^2}{q_0}$

一方、無次元掃流力 τ は1次のテイラー展開により

$$\tau_* = \frac{\widetilde{\tau}_B}{\rho s_s g \widetilde{d}} = \tau_{*0} \left\{ 1 + \left(2u' - \frac{1}{3}h' + 2\delta f_s \right) \right\} \text{ ただし } \tau_{*0} = \frac{\tau_0}{\rho s_s g \widetilde{d}}, s_s: \text{砂の水中比重} \quad (29)$$

と表せるので、これを用いて流砂量を表すと、

$$q_s = \frac{\widetilde{q}_B}{\widetilde{q}_0} = \frac{\phi_f(\tau_*)}{\phi_f(\tau_{*0})} = 1 + \frac{\phi_f'(\tau_*)}{\phi_f(\tau_{*0})} (\tau_* - \tau_{*0})$$

$$=1+\tau_{*0} \frac{\phi_f'(\tau_*)}{\phi_f(\tau_{*0})} \delta \left(2u' - \frac{1}{3}h' + 2f_s \right), \quad q_n = q_s \frac{V}{u} = v' \quad (30)$$

ただし、 f_s は掃流力に寄与しないのでここでは除くことにする。そうすると、1次のオーダーでは

$$q_s' = Q_1 \left(2u' - \frac{1}{3}h' \right) \quad \text{ここで } Q_1 = \delta \tau_{*0} \frac{\Phi_0'}{\Phi_0} \quad (31)$$

よって1次のオーダーの流砂の連続式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + Q_1 \frac{\partial}{\partial s} \left(2u' - \frac{1}{3}h' \right) + \frac{\partial v'}{\partial n} = 0 \quad (32)$$

η', u', h', v' は式(20)のように表されるので式(32)は次の2項に分けられる。

(1) 水制の影響による項

$$\frac{\partial \hat{\eta}_{MN}}{\partial t} + i M k Q_1 \left(2 \hat{u}_{MN} - \frac{1}{3} \hat{h}_{MN} \right) + i N l \hat{v}_{MN} = 0 \quad (33)$$

(2) 蛇行の影響による項

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} + i k Q_1 \left(2 \hat{u} - \frac{1}{3} \hat{\xi} + \frac{1}{3} \hat{\eta} \right) + \frac{\partial \hat{v}}{\partial n} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\eta}_{MN}}{\partial t} = 0 \quad \text{とおくと、(21)~(26)と連立させて解くことができる。}$$

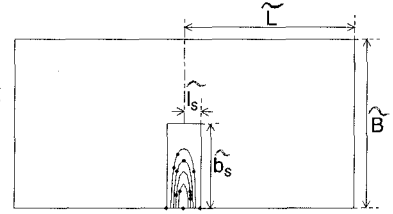


図-2 粗度分布の与え方

4. 具体例

これまでの結果に、水制による粗度の増加の様子を与えて解析を試みる。

(1) 水制による粗度の増加の仮定

粗度を表す関数 f_s を、次のように与える。(図-2 参照)

$$f_s = g_1(\xi) \cdot g_2(\zeta) \quad (35)$$

$$g_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) \right) & : -\alpha\pi \leq \xi \leq \alpha\pi \\ 0 & : -\pi \leq \xi \leq -\alpha\pi, \alpha\pi \leq \xi \leq \pi \end{cases} \quad (36)$$

$$g_2(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\zeta}{\beta} \right) \right) & : -\beta\pi \leq \zeta \leq \beta\pi \\ 0 & : -\pi \leq \zeta \leq -\beta\pi, \beta\pi \leq \zeta \leq \pi \end{cases} \quad (37)$$

ここで $\alpha = \tilde{l}_s / \tilde{L}$, $\beta = \tilde{b}_s / \tilde{B}$, $\tilde{l}_s, \tilde{b}_s$ はそれぞれ s, n 方向の水制の影響範囲の大きさ、 $\xi = \pi \tilde{s} / \tilde{L}$, $\zeta = \pi \tilde{n} / \tilde{B}$, $2\tilde{L}$: 水制設置間隔, $\tilde{B}$: 水路幅, $\tilde{s}, \tilde{n}$: $s-n$ 座標系での位置

(2) 水制の影響による項の解

式(21)(22)(23)(33)を、フーリエ級数の各モードごとに解く。

$\hat{u}_{MN}, \hat{v}_{MN}, \hat{h}_{MN}$ は、以下のように書ける。

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{MN} \\ \hat{v}_{MN} \\ \hat{h}_{MN} \end{bmatrix} = \frac{1}{D_{MN}} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ H_1 \end{bmatrix} \hat{\eta}_{MN} + \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ H_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

式(33)に代入すると、 $\hat{\eta}_{MN}$ は、以下ようになる。

$$\hat{\eta}_{MN} = - \frac{\left(i M k Q_1 \left(2 U_2 - \frac{1}{3} H_2 \right) + i N_1 V_2 \right)}{\left(i M k Q_1 \left(2 U_1 - \frac{1}{3} H_1 \right) + i N_1 V_1 \right)} \quad (39)$$

ただし、 $D_{MN} = (2S + i M k F^2) [N^2 l^2 + i M k (i M k F^2 + S)] - i M k (i M k F^2 + S) \left(i M k - \frac{4}{3} S \right)$

$U_1 = -N^2 l^2 \frac{4}{3} S + M^2 k^2 (i M k F^2 + S)$, $U_2 = -2S [N^2 l^2 + i M k (i M k F^2 + S)]$

$V_1 = M k N l \left(\frac{1}{3} S + i M k F^2 \right)$, $V_2 = 2 S M k N l$

$H_1 = -M^2 k^2 (i M k F^2 + S) - N^2 l^2 (2S + i M k F^2)$, $H_2 = 2S i M k (i M k F^2 + S)$

(3) 蛇行の影響による項の解

(24), (25), (26), (34)を連立微分方程式として解くと解が得られる。以下にその解を示す。

$$\hat{u}_{(n)} = \left(\frac{(a_3 - a_2) Q_n}{a_1 \lambda^2} + \frac{a_4}{a_1} \right) n + i 2 P_1 C \sin(\lambda n) \quad (40)$$

$$\hat{v}_{(n)} = \frac{b_3}{b_1} - \frac{Q_n}{b_1 \lambda^2} \left(i 2 \lambda C \cos(\lambda n) \right) \quad (41)$$

$$\hat{\xi}_{(n)} = \frac{Q_n}{\lambda^2} n + i 2 C \sin(\lambda n) \quad (42)$$

$$\hat{\eta}_{(n)} = \frac{Q_n}{\lambda^2} - i 2 P_2 C \sin(\lambda n) \quad (43)$$

ただし、 $a_1 = 2S + i k F^2$, $a_2 = i k - \frac{4}{3} S$, $a_3 = \frac{4}{3} S$, $a_4 = -S$, $b_1 = i k F^2 + S$, $b_3 = F^2$

$c_1 = i k$, $d_1 = i 2 k Q_1$, $d_3 = -\frac{i k Q_1}{3}$

$\lambda^2 = \frac{b_1 c_1 (d_3 - d_1)}{(d_1 - c_1)} \left(1 + \frac{a_2 c_1 - a_2 d_1 - a_1 c_1 + a_1 d_3}{a_3 c_1 - a_3 d_1 + a_1 c_1 - a_1 d_3} \right)$

$Q_n = \frac{a_4 (d_1 - d_3)}{(a_3 c_1 - a_3 d_1 + a_1 c_1 - a_1 d_3)}$

$C = \frac{\exp(2i\lambda B^*) - 1}{\exp(3i\lambda B^*) - \exp(-i\lambda B^*)} \left(b_3 - \frac{Q_n}{\lambda^2} \right) \frac{1}{i\lambda}$, $B^* = \tilde{B}/2H$

$P_1 = -\frac{a_2 + a_3}{a_1} + \frac{a_3 (d_1 - c_1) \lambda^2}{a_1 b_1 c_1 (d_3 - d_1)}$, $P_2 = (d_1 - c_1) \frac{\lambda^2}{b_1} + c (d_1 - d_3)$

ここまでの結果を式(20)にしたがって重ね合わせると、結果が得られる。

5、結果と考察

計算例を図-3、4に示す。水制は蛇行の頂点の外岸に1つ設置した。図-3 ($F_R = 1.2$, $S = 1/200$)では図-3-(b)の様に水制設置側、特に水制の背後に堆積が見られるが、対岸は様に河床が低下している。

一方、図-4 ($Fr=0.5, S=1/1000$)-(b)では、水制設置側と対岸のやや下流部で河床が低下しており、設置位置の少し上流で最も低下している。これらの結果は、これまでの実験例と必ずしも符合しない。原因としては、粗度の与え方に不適切なところがあることが考えられる。また、 $\hat{q}_{MN}$ の式の形を見ると、 τ_* に関する双曲線に似た式で、 $\tau_*=0.47$ 付近で発散し、その前後で符号がかわってしまう。基礎式の展開に何らかの工夫が必要と思われる。

参考文献

- (1) 池内幸司・玉井信行：蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性、土木学会論文報告集第334号
- (2) 長谷川和義：蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究、土木学会論文報告集第338号
- (3) 池田駿介・西村達也：砂床蛇行河川の三次元流れと河床形状、土木学会論文集第369号

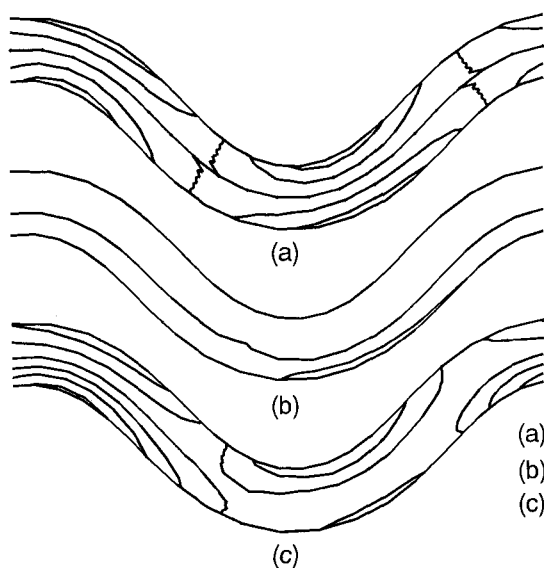


図-3

($Fr=1.2, S=1/200, L=5000,$
 $R=1000, B=10, \tau^*=0.088$)

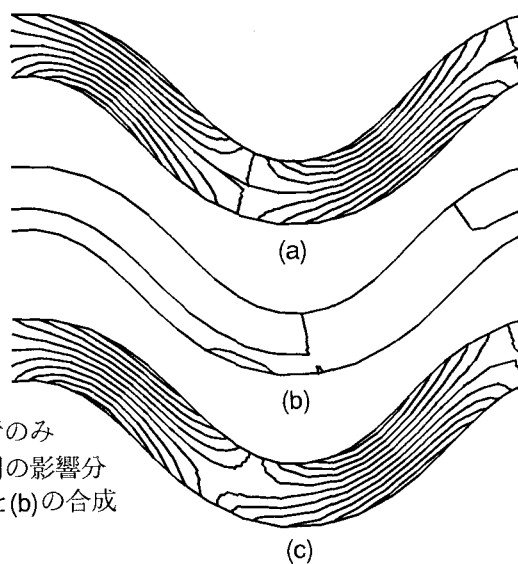


図-4

($Fr=0.5, S=1/1000, L=1000,$
 $R=200, B=10, \tau^*=0.671$)