

II-41

砂州上の植生と粒径分布に関する研究

北海道大学工学部 学生員 楠原 和典

北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男

北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

我々の周りの河川を見ると色々な種類の河川があるが、特に本研究では一植生を伴う河川を対象にするものとする。さらに同一河川においても、河川全体が植生に覆われているわけではなく、植生がある所もあれば植生がない所もある。自然河川であるので当然河床高は、時間的にも空間的にも一定でなく変動している。さらに河床の粒径も変動している。ゆえに本研究においては、簡単のため時間的に定常状態とし、中規模河床形態における砂州について考えるものとし、その砂州上のどの位置に植生（木・草に分類）があるか、また、その位置における砂の粒径分布はどの様になっているかを考察する。また実際に、豊平川に足を運び、砂州の状態を（苗穂鉄道橋－五輪大橋）間でスケッチし、理論結果と観察結果を照らし合わせて完成とする。

流れの基礎方程式を無次元・線形化し、砂州（河床形状）を与えることにより誘発される各種変動量の複素振幅を求め、特に粒径については、 x 、 y 方向の無次元波数 k 、 l 、川幅・水深比、を用いて、実数振幅と河床変動量がどの様に変わるか考察する。

2. 流れの基礎方程式の無次元・線形化

流れは二次元浅水モデルで表され、掃流砂が卓越する領域を対象として、浮遊砂の影響は無視する。

下図の様に座標系をとる。ここで、有次元量には $\bar{\cdot}$ をつける。

X 方向の流れの運動方程式

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = g \bar{I}_0 - \frac{\bar{\tau}_x}{\rho \bar{h}} - g \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{h} + \bar{\eta})$$

Y 方向の流れの運動方程式

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = - \frac{\bar{\tau}_y}{\rho \bar{h}} - g \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{h} + \bar{\eta})$$

流れの連続式

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} (\bar{u} \bar{h}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{v} \bar{h}) = 0$$

粒径別の流砂の連続式

$$\bar{\phi} \frac{\partial \bar{P}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{P}_i \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{(1-n)} \left\{ \frac{\partial (\bar{P}_i \bar{Q}_{xi})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial (\bar{P}_i \bar{Q}_{yi})}{\partial \bar{y}} \right\} = 0$$

ここで、 x, y : 縦, 横断方向の座標、 u, v : x, y 方向の流速、 h : 局所水深、 ρ : 水の密度、 g : 重力加速度、 n : 河床空隙率、 η : 河床局所変位量、 ξ : 水面局所変位量、 τ_x, τ_y : x, y 方向の河床掃流力、 q_{xi}, q_{yi} : 粒径 d_i の x, y 方向の単位幅・単位時間あたりの掃流砂量、 I_0 : 平均河床勾配、 h_0 : 平均水深、 d_m : 平均粒径、 u_* : 摩擦速度、 ϕ_{Bi} : 流砂関数、 U_0 : 平均流速、

2-1 : 流れの抵抗則

平坦床の抵抗則として、Manning-Strickler型の表現を用いると、

Study about distribution of vegetation and size of sediment on bars.

by Kazunori KUSUHARA, Mikio KUROKI, Tadaoki ITAKURA

$$\sqrt{\frac{\tau_B}{\rho}} = \check{u}, \quad \psi(\check{h}/\check{d}_m) = \frac{\check{u}}{\check{u}_i} = 6.9 \left(\frac{\check{h}}{\check{d}_m} \right) \quad \begin{bmatrix} \check{\tau}_x \\ \check{\tau}_y \end{bmatrix} = \frac{\check{\tau}_B}{\sqrt{\check{u}^2 + \check{v}^2}} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \end{bmatrix}$$

2-2: 流砂量式

$$\phi_{Bi}(\tau_{Bi}^*) = \frac{q_{Bi}}{\sqrt{s g d_i^3}} = 8 (\tau_{Bi}^* - \tau_{ci}^*)^{\frac{3}{2}}, \quad \begin{bmatrix} \check{q}_{xi} \\ \check{q}_{yi} \end{bmatrix} = \frac{\check{q}_{Bi}}{\sqrt{\check{u}^2 + \check{v}^2}} \begin{bmatrix} \check{u} \\ \check{v} \end{bmatrix}$$

2-3: 摂動化

全体平均に $\bar{\quad}$ をつけ、微小変化量に $\widetilde{\quad}$ をつける。

$$u = \bar{u} + \widetilde{u}, \quad v = 0 + \widetilde{v}, \quad \zeta = \bar{\zeta}, \quad \eta = \bar{\eta}, \quad h = \bar{h} + \widetilde{h}, \quad h = \zeta - \eta$$

$$\tau_B = \bar{\tau}_B + \widetilde{\tau}_B, \quad \tau_x = \bar{\tau}_x + \widetilde{\tau}_x, \quad \tau_y = 0 + \widetilde{\tau}_y,$$

$$q_{Bi} = \bar{q}_{Bi} + \widetilde{q}_{Bi}, \quad q_{xi} = \bar{q}_{xi} + \widetilde{q}_{xi}, \quad q_{yi} = 0 + \widetilde{q}_{yi},$$

$$p = \bar{p} + \widetilde{p}, \quad d_m = \bar{d}_m + \widetilde{d}_m,$$

2-4: 無次元化

文字の上に $\check{\quad}$ をつけたものを有次元量とし、何もつけないものと、

特に河床せん断力に関しては*をつけたものと、何もつけないものを無次元量とする。

$$h_0 = \bar{h}, \quad U_0 = \bar{U} = \bar{u}, \quad d_{m0} = \bar{d}_m \text{ を利用すると、}$$

$$\tau_B = \frac{\check{\tau}_B}{\rho g h_0 I_0}, \quad \tau_{Bi}^* = \tau_{xi}^* = \frac{\check{\tau}_B}{\rho s g d_i}, \quad \tau_{ci}^* = \frac{0.45}{\{1.0(2+2|d_i/\check{d}_{m0})\}^2}$$

$$x = \frac{\check{x}}{h_0}, \quad y = \frac{\check{y}}{h_0}, \quad \zeta = \frac{\check{\zeta}}{h_0}, \quad \eta = \frac{\check{\eta}}{h_0}, \quad p = \check{p} \cdot \check{d}_{m0}, \quad h = \frac{\check{h}}{h_0}$$

$$t = \frac{\check{t} \cdot \check{U}_0}{(1-n)h_0}, \quad s = \frac{\check{d}_i}{d_{m0}}, \quad u = \frac{\check{u}}{U_0}, \quad v = \frac{\check{v}}{U_0}, \quad d_m = \frac{\check{d}_m}{d_{m0}}$$

$$U^2 = u^2 + v^2, \quad \delta = \frac{\check{\delta}}{h_0}, \quad F_r^2 = \frac{\check{U}^2}{g h}, \quad q_{Bi} = \frac{q_{Bi}}{U_0 h_0}$$

2-5: 無次元後の基礎方程式

よって4つの基礎方程式に無次元線形化を施すと次の様になる。

$$F_r^2 \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial (\widetilde{h} + \widetilde{\eta})}{\partial x} + I \left(\widetilde{\tau}_x - \widetilde{h} \right) = 0$$

$$F_z^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{h} + \tilde{\eta})}{\partial y} + l \tilde{\tau}_v = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} = 0$$

$$\delta \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} + \bar{P}_i \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \bar{P}_i \bar{q}_{Bi} \left\{ \frac{1}{\bar{q}_{Bi}} \frac{\partial \tilde{q}_{xi}}{\partial x} + \frac{1}{\bar{q}_{Bi}} \frac{\partial \tilde{q}_{yi}}{\partial y} + \frac{1}{\bar{P}_i} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial x} \right\} = 0$$

ここで、流砂量Qを消去すると、

$$\delta \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial t} + \bar{P}_i \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t} + \bar{P}_i \bar{q}_{Bi} \cdot$$

$$\left\{ \frac{1}{\bar{P}_i} \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial x} + A_i \frac{\partial}{\partial x} \left(2\tilde{u} + \frac{1}{3}\tilde{d}_m - \frac{1}{3}\tilde{h} \right) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \alpha_z \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial y^2} \right\} = 0$$

$$A_i = \frac{\bar{\tau}_{Bi}^*}{\phi(\bar{\tau}_{Bi}^*)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \tau_{Bi}^*} \right] \bar{\tau}_{Bi}^* = \frac{3}{2} \frac{\bar{\tau}_{xi}^*}{(\bar{\tau}_{xi}^* - \tau_{ci}^*)}$$

3：砂州上の流れと粒度の分布

河床に次式のような二重調和関数で表される微小な擾乱を与え、砂州の形状を決める。

$$\tilde{\eta} = \hat{\eta} \cos(l y) \cdot \exp\{ik(x - ct)\} + c.c.$$

ここで、 $\hat{\eta}$ ：擾乱振幅で実数， c ：無次元複素移動速度， k, l ： $\tilde{x}, \tilde{y}$ 方向の波数， $c.c.$ ： $\tilde{\eta}$ の共役複素数，

さらに、今回は定常状態について考えるものとする、河床の擾乱によって誘発される変動量は、次式の様に表現される。

$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{h} \\ \tilde{p} \\ \tilde{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{h} \\ \hat{p} \\ \hat{d}_m \end{bmatrix} \cos(l y) \cdot \exp(ikx) + c.c.$$

$$[\tilde{v}] = [\hat{v}] \sin(l y) \cdot \exp(ikx) + c.c$$

無次元後の基礎方程式に代入すると、複素振幅に関する4つの連立式を得る。

$$(2I + ikF^2) \hat{u} - \left(\frac{4}{3} I - ik \right) \hat{h} + \frac{1}{3} \hat{d}_m = -ik \hat{\eta}$$

$$(I + ikF^2) \hat{v} - l \hat{h} = l \hat{\eta}$$

$$ik \hat{u} + l \hat{v} + ik \hat{h} = 0$$

$$2ikA_1 \hat{u} + l \hat{v} - \frac{1}{3} ikA_1 \hat{h} + \frac{ik}{p} \hat{p} + \frac{1}{3} ikA_1 \hat{d}_m = 0$$

最初の3本の連立式より、 $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{h}$ を求めると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_u \\ B_v \\ B_h \end{bmatrix} \hat{d}_m + \begin{bmatrix} C_u \\ C_v \\ C_h \end{bmatrix} \hat{\eta}$$

最後の4本目の方程式に上式を代入すると、

$$\hat{p}(s) + \overline{p}(s)B(s)\hat{d}_m + \overline{p}(s)C(s)\hat{\eta} = 0$$

ここで、 $s = \frac{\hat{d}_i}{\hat{d}_{m0}}$: 粒径 $\hat{d}_i$ の無次元量

$$B(s) = A(s) \left\{ 2B_u - \frac{1}{3}B_h + \frac{1}{3} \right\} + \frac{1}{ik} B_v, \quad C(s) = A(s) \left\{ 2C_u - \frac{1}{3}C_h \right\} + \frac{1}{ik} C_v$$

さらに、確率密度関数 $\hat{p}$ と平均粒径 $\hat{d}_m$ の間の関係式を s を用いて無次元化すると、

$$\hat{d}_m = \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\hat{p}(s) \cdot s] \partial s$$

と表されるので、複素振幅 $\hat{p}$, $\hat{d}_m$ の間には次式の関係が成立する。

$$\hat{d}_m = \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\hat{p}(s) s] \partial s \quad \text{左式を代入すると、}$$

$$\hat{p}(s) + \overline{p}(s)B(s) \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\hat{p}(t) \cdot t] \partial t + \overline{p}(s)C(s)\hat{\eta} = 0$$

上式は第2種Fredholmの積分方程式であり、これを解くのは困難であるが、 $B(s)$, $C(s)$ が簡単な関数であれば解析解を求める事が出来る。

4: 積分方程式 ($\tau_i^* > \tau_{ci}^*$ の場合) の近似解析解

いま、流砂量式として Meyer-Puter-Muller の式を用いることにすると、上の様に近似する事により

$$A_i = A(s) = \frac{1.5 \tau_i^*}{\tau_i^* - \tau_{ci}^*} \approx \frac{3}{2} \quad \text{とおける。}$$

すると $B(s)$, $C(s)$ は定数 B, C となるので、原式は次の様に書ける。

$$\hat{p}(s) = -\overline{p}(s)C\hat{\eta} - B \int_{S_{min}}^{S_{max}} K(s, t) \hat{p}(t) \partial t, \quad K(s, t) = \overline{p}(s) \cdot t$$

よって解は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{p}(s) &= -\overline{p}(s)C\hat{\eta} + \frac{1}{1+B} \int_{S_{min}}^{S_{max}} [B\overline{p}(s)tC\overline{p}(t)\hat{\eta}] \partial t \\ &= C\overline{p}(s) \left\{ -1 + \frac{B}{1+B} \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\overline{p}(t) \cdot t] \partial t \right\} \hat{\eta} \end{aligned}$$

ここで全体平均粒径の無次元量 $\bar{d}_m = \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\bar{p}(t) \cdot t] \partial t = 1.0$ を用いて積分すると、

$$= -\frac{C}{1+B} \bar{p}(s) \hat{\eta} \text{ となる。}$$

よって複素振幅 $\hat{d}_m$ を求めると、

$$\hat{d}_m = \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\hat{p}(t) \cdot t] \partial t = -\frac{C}{1+B} \hat{\eta} \int_{S_{min}}^{S_{max}} [\bar{p}(t) \cdot t] \partial t = -\frac{C}{1+B} \hat{\eta} \text{ となる。}$$

5：平均粒径振幅（実数）と河床変動量との位相差

4：によって求めた複素振幅を用いて、平均粒径微小変動量を実数振幅と位相の関数で表してみる。

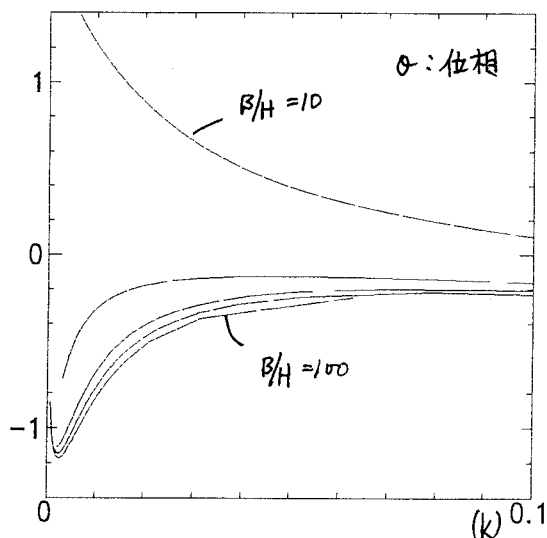
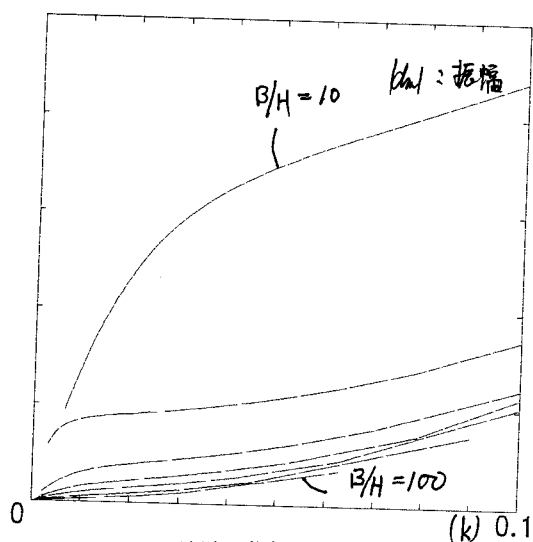
複素振幅を $a+bi$ ： a, b 実数、平均粒径振幅を $|d_m|$ 、位相差を θ とすると、3：において $\hat{p}$ を表す式に代入して整理すると次の様になる。

$$\hat{d}_m = |d_m| \cos(kx - \theta) \cdot \cos(ly) = 2 \cdot \{a \cos(kx) - b \sin(kx)\} \cdot \cos(ly)$$

$$\text{これを解くと、 } |d_m| = 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \theta = -\frac{b}{a} \text{ となる。}$$

ここで、 $k = \frac{2\pi}{\varepsilon B/H}$ 、 $l = \frac{\pi}{B/H}$ において、最初に $B/H = \text{一定}(10)$ にしておき、 ε を1

から100まで、5きざみで変化させて（砂州の一波長分の長さが10から1000まで変化）、横軸に k 、縦軸にそれぞれ 平均粒径振幅と位相差をとり、さらに B/H を100まで、10きざみで変化させて（川幅の無次元量を10から100まで）グラフを描く。横断方向分割数=1より単列砂州について考える。



6：結果と考察

1、平均粒径振幅

k の値が小さくなるにつれ、振幅は徐々に小さくなり0に近づく。さらに川幅が広くなるにつれ、全体の振幅も小さくなる。これは砂州の波長が長くなるにつれて振幅が小さくなり、粒径変化がなくなって安定してくる事を示している。川幅が広くなっても単列砂州であるので砂州の形は変わらない。すなわち、砂州

の一波長全体が大きく、長くなるので多少の粒径変化があっても全体としては無視出来るものと考えられる。

2、河床変化に対する位相差

$B/H=10$ ＝一定状態にしており、 k の値が小さくなるにつれ、位相は＋方向に大きくなる。これは砂州の波長が小さくなるにつれて、ずれが大きくなり、流下方向に進んでいくことを示している。そして川幅が広がると、今回のグラフには現れていないが、位相が全くずれなくなる川幅が存在する事がわかる。

さらに広がると、位相は－方向に大きくなる。これは同じく、砂州波長が小さくなるにつれて、ずれが大きくなり、こんどは反対に上流方向に進んでいくことを示している。

参考文献

- 1：黒木 幹男・岸 力；中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究
- 2：板倉 忠興・黒木 幹男・佐藤 圭；急勾配水路の水面波の成因について 土木学会北海道支部論文報告集 平成4年度
- 3：岸 力・板倉 忠興・黒木 幹男・森 明巨；砂州の形状特性と流れに関する研究