II－２

貯留型流出モデルにおける確率応答
－降雨量が互いに従属する不規則関数の場合－

日本国土開発(株)　正　員　工藤　睦信
北海道大学工学部　正　員　藤田　睦博
北海道大学大学院　学生員　篠原　伸和
北海道大学工学部　正　員　長谷川和義

1　はじめに

著者らは、これまでに貯留型流出モデルの確率応答に関して研究を進めてきたが、これらは降雨量を互いに独立な不規則関数とした場合である[1,2]。しかしながら、実測降雨量が完全に独立な不規則関数と仮定することは実現象を正確に記述していない。本研究は、降雨量が互いに従属している不規則関数とした場合の確率応答の理論解析を行い、降雨量が互いに独立な場合の流出量の確率応答と比較したものである。

2　基礎理論

最も簡単な貯留関数法は、式(1),(2)で与えられる。

$$\frac{dS}{dt}+q=r \tag{1}$$

$$S=Kq^{P} \tag{2}$$

式(1)において、降雨量 r が不規則関数である場合には、流出量 q および貯留量 S もまた不規則関数となる。これらの量を平均値と平均値からの偏差で表現する。

$$r=\overline{r}+\widetilde{r} \qquad E(\widetilde{r})=0 \tag{3}$$

$$q=\overline{q}+\widetilde{q} \qquad E(\widetilde{q})=0 \tag{4}$$

$$S=\overline{S}+\widetilde{S} \qquad E(\widetilde{S})=0 \tag{5}$$

式(1),(2)から流出量 q を消去して

$$\frac{dS}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}S^{m}=r \qquad m=\frac{1}{P} \tag{6}$$

式(6)の右辺第二項のベキ乗型の不規則関数 S^{m} に、次の近似式を用いる。

$$S^{m}=\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S} \tag{7}$$

Brasは、式(7)の係数 α,β に関して式(7)の両辺の誤差の平均値を0、分散を最小にする α,β として、次式を提案している。

$$\alpha=\overline{S}^{m-1}\left\{1+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\widetilde{S}^{2})}{\overline{S}^{2}}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E(\widetilde{S}^{3})}{\overline{S}^{3}}+\cdots\right\} \tag{8}$$

$$\beta=\frac{\overline{S}^{m}}{E(\widetilde{S}^{2})}\left\{m\frac{E(\widetilde{S}^{2})}{\overline{S}}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E(\widetilde{S}^{3})}{\overline{S}^{2}}+\cdots\right\} \tag{9}$$

式(3)～(5),(7)を式(6)に代入して次式を得る。

$$\frac{d(\overline{S}+\widetilde{S})}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}(\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S})=\overline{r}+\widetilde{r} \tag{10}$$

式(10)の期待値をとる。

$$\frac{d\overline{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\alpha\overline{S}=\overline{r} \tag{11}$$

式(10)から式(11)を差し引くと、次式を得る。

$$\frac{d\widetilde{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta\widetilde{S}=\widetilde{r} \tag{12}$$

式(12)において $\beta\sim\widetilde{S}$ の関係は、式(9)に示されているように完全には独立ではない。しかし、その関係は期待値の演算子 $E(\ )$ を介しており、$\beta\sim\widetilde{S}$ の従属性は弱いものと考えられる。ここでは $\beta\sim\widetilde{S}$ が独立の仮定の基に、式(12)を解くと、次式を得る。

The Impact of Mutually Dependent Rainfall Input for Stochastic Response in a Storage Function Model
by Mutsunobu KUDO, Mutsuhiro FUJITA, Nobukazu SHINOHARA, Kazuyoshi HASEGAWA

$$\tilde{S}=e^{-\int^{t}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta d\tau_1}\int\tilde{r}(\tau_2)$$

$$\times e^{\int^{\tau_2}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta d\tau_3}d\tau_2 \qquad (13)$$

式(13)の両辺を2乗して、期待値をとると貯留量の分散 $\sigma_S{}^2$ が得られる。

$$\sigma_S{}^2=$$

$$e^{-2\int^{t}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta d\tau_1}\iint E\{\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}$$

$$\times e^{\int^{\tau_2}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta d\tau_4+\int^{\tau_3}\left(\frac{1}{K}\right)^{m}\beta d\tau_5}d\tau_2 d\tau_3 \qquad (14)$$

これまでの著者らの一連の研究は、降雨量 r が互いに独立な不規則関数である場合を対象としている。すなわち、降雨量 r の自己共分散関数を、式(15)で与えている。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_r{}^2\delta(\tau_1-\tau_2) \qquad (15)$$

$\sigma_r{}^2$：降雨量の分散　δ：デルタ関数

実測降雨量は、厳密には式(15)に従っていない。

図-1は実測降雨量を用いて、自己共分散関数を計算した結果を示している。いずれの自己共分散関数も指数関数で近似できることを示している。実測降雨量は、式(16)によって連続的な降雨量 $r(t)$ を離散化したものである。

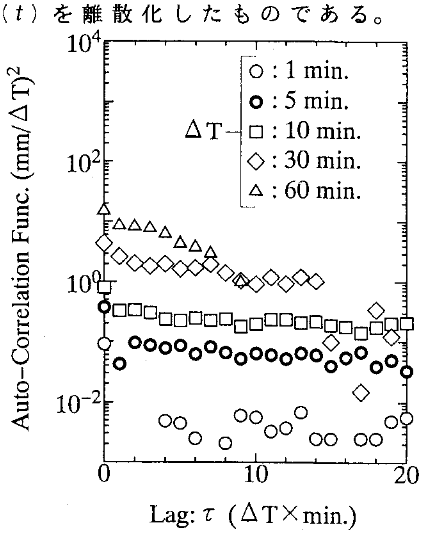

図-1　Δt分間雨量の自己共分散関数

$$R_t=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t}r(\tau)d\tau \qquad (16)$$

本論文では離散的な降雨量に大文字の R を連続的な降雨量には小文字の r（添え字も含む）を用いて、両者を区別している。したがって、図-1は連続的な降雨量 $r(t)$ の自己共分散関数を示していないが、$r(t)$ の自己共分散関数もまた指数関数で近似できると仮定する。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_r{}^2e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|} \qquad (17)$$

式(16)の両辺の期待値をとると、r が定常な不規則関数の場合、次式を得る。

$$E(R)=\overline{r} \qquad (18)$$

式(16)の両辺を2乗して期待値をとると

$$\sigma_R{}^2=\frac{1}{\Delta t^2}\iint_{t-\Delta t}^{t}E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2 \qquad (19)$$

式(17)を用いると、次式が得られる。

$$\sigma_R{}^2=\frac{2\sigma_r{}^2}{(\gamma\Delta t)^2}\left\{\gamma\Delta t+e^{-\gamma\Delta t}-1\right\} \qquad (20)$$

$R(t)$ の自己共分散関数は、式(21)となる。

$$E\{\tilde{R}_{\tau_1}\tilde{R}_{\tau_2}\}=\frac{\sigma_r{}^2}{(\gamma\Delta t)^2}$$

$$\times\left\{e^{-\gamma\Delta t}+e^{\gamma\Delta t}-2\right\}e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|} \qquad (21)$$

ただし $(\tau_1\neq\tau_2)$

式(21)の離散的な降雨量 R_t の自己共分散関数を $V(|\tau_1-\tau_2|)$ とすると、式(22)を満足している。

$$V(0)>\sigma_R{}^2>V(1) \qquad (22)$$

$\sigma_R{}^2$ は、式(20)を意味している。すなわち、離散的な降雨量 R_t の自己共分散関数は式(23)のような指数関数で表示できないことを示している。

$$E\{\tilde{R}_{\tau_1}\tilde{R}_{\tau_2}\}=\sigma_R{}^2\rho^{|\tau_1-\tau_2|} \qquad (23)$$

式(20),(21)で記述される R_t は、ARMA(1,1)過程になっている。離散的な降雨量の自己共分散関数を式(23)を満足するように連続的降雨量の自己共分散関数を定義しようとすれば、式(24)のようになる。

$$E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\}=\sigma_{r1}^2 e^{-\gamma|\tau_1-\tau_2|}+\sigma_{r2}^2\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{24}$$

式(24)を式(19)に代入して、次式を得る。

$$\sigma_R^2=\frac{2\sigma_{r1}^2}{(\gamma\Delta t)^2}\left\{\gamma\Delta t+e^{-\gamma\Delta t}-1\right\}+\frac{C\sigma_{r2}^2}{\Delta t} \tag{25}$$

ここに、Cは時間の次元を持つ係数である。また、R_tの自己共分散関数は式(21)と同一である。式(24)を式(14)に代入して、若干の計算の後、式(26)を得る。

$$\frac{d\sigma_S^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S^2=2\sigma_{r1}^2U(t)e^{-\gamma t}+C\sigma_{r2}^2 \tag{26}$$

$$\frac{dU}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta U=e^{\gamma t} \tag{27}$$

式(26),(27)において変数変換を行うと次式を得る。

$$\frac{d\sigma_S^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S^2=2\sigma_{r1}^2U(t)+C\sigma_{r2}^2 \tag{28}$$

$$\frac{dU}{dt}+\left\{\gamma+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\right\}U=1 \tag{29}$$

貯留量の平均値は式(11)で与えられ、分散は式(28),(29)で与えられる。式中の係数α,βは、$\overline{S},\sigma_S^2$の関数になっているので、式(11),(28),(29)を連立微分方程式として解くことにより、貯留量の平均値と分散が得られる。降雨量が互いに独立の場合、σ_S^2は式(30)を満足している。

$$\frac{d\sigma_S^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_S^2=C\sigma_r^2 \tag{30}$$

式(28)と比較すると、式(28)の右辺第1項が無い場合に相当している。

式(2)を変形して、次式が得られるので

$$q=\left(\frac{1}{K}\right)^m S^m \tag{31}$$

これに、式(4),(5),(9)式を用いると

$$\overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S} \tag{32}$$

$$\tilde{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\tilde{S} \tag{33}$$

したがって、式(33)を2乗して期待値をとることにより流出量の分散σ_q^2が得られる。

$$\sigma_q^2=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2\sigma_S^2 \tag{34}$$

3 シミュレーション法による検討

理論式を導くに当たって、仮定した$\beta\sim\tilde{S}$の独立性およびα,βとして何項まで採用すべきかを検討するためにシミュレーション法によって、σ_q^2を求め、理論解と比較した。本研究では貯留量の1,2次モーメントのみに注目しているので、係数αでは第2項まで、係数βでは第1項のみしか扱うことのできないことを付記しておく。離散的なR_tとして、式(35)を考える。

$$R_t=\overline{R}+\tilde{R}_t \tag{35}$$

$\tilde{R}_t$の自己共分散関数としては、式(23)を用いることにする。$\tilde{R}_t$はAR(1)過程を満足しているので、次式よって$\tilde{R}_t$を発生させた。

$$\tilde{R}_t=\rho\tilde{R}_{t-1}+N_t \tag{36}$$

N_tは$\tilde{R}_t$と独立な不規則関数で、式(37)に示す統計量をもっている。

$$E(N_t)=0,\ E(N_{t1}N_{t2})=\sigma_N^2\delta(t_1-t_2) \tag{37}$$

式(36)より、次式を得る。

$$E\{\tilde{R}_{\tau1}\tilde{R}_{\tau2}\}=\frac{\sigma_N^2}{1-\rho^2}\rho^{|\tau_1-\tau_2|} \tag{38}$$

すなわち、シミュレーション法では、ρ,σ_N^2を定めて、式(36)より$\tilde{R}_t$を発生させ、式(35)を用いてR_tを得る。このR_tを式(1)の右辺に用いて、$q(t)$を求める。この計算過程を繰り返し、時刻tごとに$\overline{q},\sigma_q^2$を得た。

一方、理論計算では次式を用いて必要な$\gamma,\sigma_{r1}^2,\sigma_{r2}^2$を求めた。

$$\gamma=-\frac{\log(\rho)}{\Delta t} \tag{39}$$

$$\sigma_{r1}^2=\frac{(\gamma\Delta t)^2\sigma_R^2}{e^{-\gamma\Delta t}+e^{\gamma\Delta t}-2} \tag{40}$$

$$\sigma_{r2}^2=\frac{\Delta t(e^{\gamma\Delta t}-e^{-\gamma\Delta t}-2\gamma\Delta t)\sigma_R^2}{C(e^{-\gamma\Delta t}+e^{\gamma\Delta t}-2)} \tag{41}$$

$$\sigma_R{}^2=\frac{\sigma_N{}^2}{1-\rho^2} \qquad (42)$$

図-2,3は、シミュレーション法と式(11),(28),(29),(32),(34)による流出量の2次モーメントを示している。計算条件は図中に示すとおりである。ただし、図-3は、$\overline{R}$ が時間的に変化する場合でこれを図-4に示す。理論式による計算では、式(39)～(41)より降雨量の2次モーメントを求め、これらを式(11),(28),(29),(32),(34)に代入している。また、式(8),(9)で与えられる係数 α,β は、共に第1項のみ採用しているが、十分な適合度を示していることがわかる。なお、流出量の1次モーメントに関しては紙面の都合上省略している。

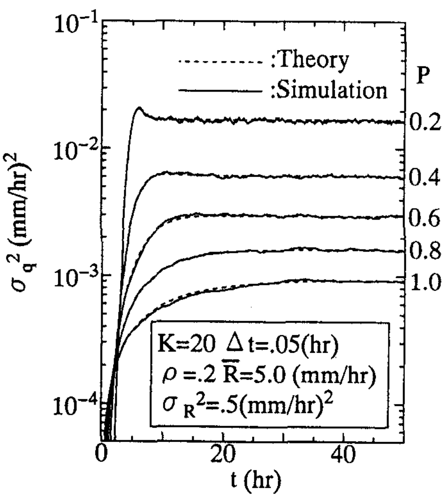

図-2　$\overline{R}$ =const.の場合の $\sigma_q{}^2$

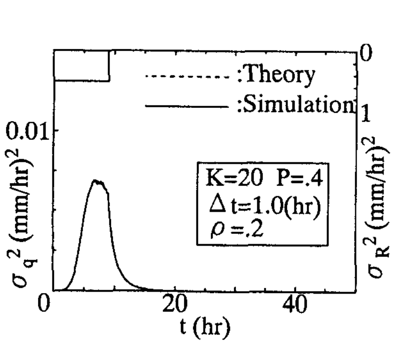

図-3　三角波形降雨の場合の $\sigma_q{}^2$

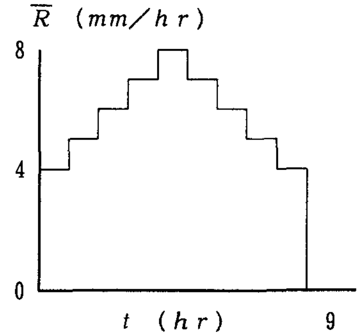

図-4　三角波形降雨の形状

4　まとめ

貯留型流出モデルにおいて、降雨量が時間的に変動し、なおかつ互いに従属する場合についての流出量の1,2次モーメントを求める理論式を誘導し、その妥当性を検討した。図-5は、降雨量の従属性の度合い(ρ)によりどの様に流出量の分散に対し影響を及ぼすのかを図示したものである。ρ=0.0は、独立な降雨量を与えていることを表し、計算条件は図中に示している。ρ が大きくなると、流出量の分散もそれに応じ大きくなっていることがわかる。本研究は、文部省科学研究費一般研究(B)(代表　藤田睦博)の補助を受けた。関係各位に謝意を表する。

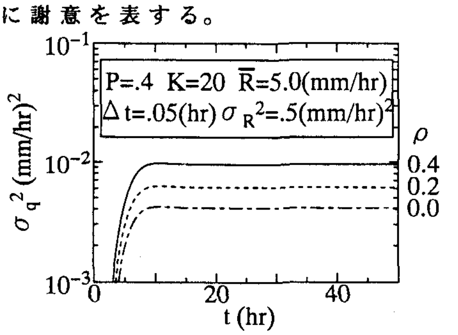

図-5　ρ の違いによる $\sigma_q{}^2$

参考文献

1)藤田睦博,中尾隆志:貯留型流出モデルの確率応答に関する研究,水工学論文集,第36巻,pp.561～566,1992

2)藤田睦博,中尾隆志,篠原伸和:貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について,水工学論文集,pp99～104,1993