

II-1

KINEMATIC WAVE モデルの確率応答

日本国土開発(株) 正 員 工藤睦信
北海道大学工学部 正 員 藤田睦博
北海道大学工学部 学生員 竹本 晃

1 はじめに

集中定数系の代表的な流出モデルである貯留関数法の確率応答に関しては藤田^{1,2)}によって既に研究されている。降雨量が互いに独立な不規則関数としたときの流出量の1~4次モーメントを理論的に求めている。また、藤田³⁾は代表的な分布定数系の流出モデルであるKinematic Waveモデルを集中化することにより貯留型の流出モデルを得ている。この集中化過程は、貯留関数法とKinematic Waveモデルの貯留量~流出量の関係に着目したものである。しかしながら、流出系に本来存在していると考えられる不確定性については考慮していない。本論文は、降雨量が独立な不規則関数として与えられたとき、流出量の分散に着目して集中化過程を検討したものである。

2 基礎理論

一定勾配の斜面上におけるKinematic Wave モデルの基礎式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad 0 \leq x \leq l \text{ (斜面長)} \quad (1)$$

$$q = \epsilon h^m \quad (2)$$

h : 水深 q : 単位幅流量 r : 降雨量
 t : 時間 x : 斜面に沿う距離

式(1)において降雨量 r が不規則関数であるとき、 h, q も不規則関数となる。

2.1 線形系

式(2)において $m=1$ のとき、基礎方程式は線形方程式となる。したがって、その解を容易に求めることができる。

$$q(x, t) = \int_0^t r(\tau) K(t-\tau) d\tau \quad (3)$$

$K(t)$ は、インパルス応答関数で、図-1にその関数形を示している。

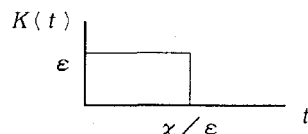


図-1 インパルス応答関数

q, r を平均値と平均値からの偏差に分離する。

$$r = \bar{r} + \tilde{r} \quad E(\tilde{r}) = 0 \quad (4)$$

$$q = \bar{q} + \tilde{q} \quad E(\tilde{q}) = 0 \quad (5)$$

したがって、次式を得る。

$$\bar{q} = \int \bar{r} K(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

$$\tilde{q} = \int \tilde{r} K(t-\tau) d\tau \quad (7)$$

いま、 $r(t)$ として定常で互いに独立な不規則関数を考える。

$$\bar{R} = \text{const.} \quad (8)$$

$$E\{\tilde{r}(\tau_1) \tilde{r}(\tau_2)\} = \sigma_r^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) \quad (9)$$

δ : デルタ関数

式(9)を式(7)に代入後、2乗して期待値をとると流出量の分散 σ_q^2 が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &= \iint \sigma_r^2 \delta(\tau_1 - \tau_2) \\ &\quad \times K(t-\tau_1) K(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \begin{cases} C \sigma_r^2 \epsilon^2 t & 0 \leq t \leq \frac{x}{\epsilon} \\ C \sigma_r^2 \epsilon x & t \geq \frac{x}{\epsilon} \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

C は時間の次元を持つ係数で、式(10)の両辺の次元を同じにするために必要である。

式(10)の σ_q^2 は、次の微分方程式を満足している。

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial x} = C \sigma_r^2 \quad (11)$$

流出量の3,4次モーメントも式(9)を3,4乗して期待値をとることにより得られるが、ここでは2次モーメントまでを考えることとする。

2.2 非線形系

$m \neq 1$ のとき、基礎方程式は非線形になる。式(1), (2)より h を消去する。

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^P \frac{\partial q^P}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r \quad P = \frac{1}{m} \quad (12)$$

ベキ乗型の確率変数に関して次式を用いる。

$$q^P = \alpha \bar{q} + \beta \tilde{q} \quad (13)$$

式(4), (5), (13)を式(12)に代入して次式を得る。

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^P \frac{\partial (\alpha \bar{q} + \beta \tilde{q})}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{q} + \tilde{q})}{\partial x} = \bar{r} + \tilde{r} \quad (14)$$

式(14)の期待値をとることにより、式(15)を得る。

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^P \frac{\partial (\alpha \bar{q})}{\partial t} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \bar{r} \quad (15)$$

式(14)から式(15)を差し引くと次式を得る。

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^P \frac{\partial (\beta \tilde{q})}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} = \tilde{r} \quad (16)$$

式(16)より次の特性方程式を得る。

$$\frac{d\tilde{q}}{dt} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \tilde{q} = \frac{\varepsilon^P}{\beta} \tilde{r} \quad (17)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon^P}{\beta} \quad (18)$$

Brasは、式(13)の両辺の誤差の平均値を0、分散を最小にする α, β として、次式を提案している。

$$\alpha = \frac{\bar{q}^{P-1}}{q} \left\{ 1 + \frac{1}{2} P(P-1) \frac{E(\tilde{q}^2)}{q^2} + \frac{1}{6} P(P-1)(P-2) \frac{E(\tilde{q}^3)}{q^3} + \dots \right\} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{\bar{q}^P}{E(\tilde{q}^2)} \left\{ P \frac{E(\tilde{q}^2)}{\bar{q}} + \frac{1}{2} P(P-1) \frac{E(\tilde{q}^3)}{\bar{q}^3} \right\}$$

$$+ \frac{1}{6} P(P-1)(P-2) \frac{E(\tilde{q}^4)}{q^3} + \dots \} \quad (20)$$

式(20)に示すように β は $\tilde{q}$ の関数になっている。したがって、式(17)の係数

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

もまた $\tilde{q}$ とは独立ではない。

しかしながら $\beta \sim \tilde{q}$ の関係は期待値の演算子 $E(\cdot)$ を介して結ばれているので、

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t}$$

と $\tilde{q}$ の従属性が極めて弱い思

われる。したがって、式(17)から次式が得られる。

$$\tilde{q} = e^{-\int_0^t D(\tau_1) d\tau_1} \int_0^t \frac{\varepsilon^P}{\beta} \tilde{r}(\tau_2) \times e^{\int_0^{\tau_2} D(\tau_3) d\tau_3} d\tau_2 \quad (21)$$

$$D(t) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (22)$$

式(21)を2乗して期待値をとることにより式(23)を得る。

$$\frac{d\sigma_q^2}{dt} + 2 \frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} \sigma_q^2 = \frac{\varepsilon^{2P}}{\beta^2} C \sigma_r^2 \quad (23)$$

式(18), (23)より σ_q^2 に関する微分方程式を誘導できる。

$$\beta \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial t} + \varepsilon^P \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial x} = \frac{\varepsilon^{2P}}{\beta} C \sigma_r^2 - 2 \frac{\partial \beta}{\partial t} \sigma_q^2 \quad (24)$$

3 シミュレーション法による検討

次に、式(24)の適合性を検討する。

式(1), (2)は、 l, ε, m のパラメータを含んでおり、藤田と同様に基礎式を無次元化して次式を得る。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial Q}{\partial X} = R, \quad Q = H^m \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (25), (26)$$

大文字の量は、それぞれ小文字の量に対する無次元量を示している。次元を持っている量との対応関係を次に示す。

$$t = t^* T, \quad x = x^* X, \quad h = h^* H, \quad q = q^* r = r^* R \quad (27)$$

$$r^* = \bar{r}, \quad x^* = l, \quad t^* = \left(\frac{l \bar{r}^{1-m}}{e} \right)^{1/m}$$

$$h^* = t^* r^*, \quad q^* = x^* r^* \quad (28)$$

式(25), (26)は、基礎式(1), (2)に比較してパラメータの数が1個少なく、かつ、無次元距離 X が $0 \leq X \leq 1$ なので、 m の値のみによってその特性が記述される利点がある。式(25), (26)を基礎式と考えると、式(15), (24)に対応する平均値、分散方程式は、次のようになる。

$$\frac{\partial(\alpha \bar{Q})}{\partial T} + \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} = \bar{R} \quad (29)$$

$$\beta \frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial T} + \frac{\partial \sigma_Q^2}{\partial X} = \frac{\sigma_R^2}{\beta} - 2 \frac{\partial \beta}{\partial T} \sigma_Q^2 \quad (30)$$

式(30)は無次元表示になっているので、式(24)と比較すると、右辺第1項の係数 C が消失する。式(19), (20)の α, β とし第1項まで採用すると

$$\alpha = \bar{Q}^{p-1}, \quad \beta = P \bar{Q}^{p-1} \quad (31)$$

いま、 $\bar{r} = \cos t$ とすると無次元平均流量 $\bar{Q}$ は、式(29)より容易に得られる。

$$Q = \begin{cases} R^n T^n & 0 \leq T \leq (R^{1-m} X)^{1/m} \\ R X & T \geq (R^{1-m} X)^{1/m} \end{cases} \quad (32)$$

したがって、式(30)より

$$\sigma_Q^2 = \begin{cases} \frac{1}{P^2} \bar{R}^{2(1-P)/P} T^{(2-P)/P} \sigma_R^2 & (0 \leq T \leq T_c) \\ \frac{1}{P(2-P)} \bar{R}^{1-P} X^{2-P} \sigma_R^2 & (T \geq T_c) \end{cases} \quad (33)$$

$$T_c = \bar{r}^{(1-m)/m}$$

一方、シミュレーション法では式(25)の $R(T)$ に乱数系列を与えて数値的に式(25), (26)を解いて、 $Q(T)$ を求めた。このような計算を繰り返し、時刻 T ごとに $\bar{Q}, \sigma_Q^2$ を得た。式(25)の $R(T)$ は、連続的な不規則関数として定義されているが、数値計算では ΔT ごとの離散的な不規則関数として取り扱わざるを得ない。

連続的な降雨量 $R(t)$ は、次式を介して離散的な降雨量 $R_d(t)$ に変換される。

$$R_d(T) = \frac{1}{\Delta T} \int_{T-\Delta T}^T R(\tau) d\tau \quad (34)$$

したがって、式(34)より連続的な降雨量の統計量と離散的な降雨量の統計量の間には、式(9)を考慮すると次式が成立している。

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{\sigma_R^2}{\Delta T} \quad \bar{R}_d = \bar{R} \quad (35), (36)$$

式(36)で $\sigma_{R_d}^2, \sigma_R^2, \Delta T$ は、無次元量として定義されている。 $\sigma_{R_d}^2, \sigma_R^2, \Delta T$ が次元のある量の場合、式(36)は式(37)のようになる。

$$\sigma_{R_d}^2 = \frac{C \sigma_R^2}{\Delta T} \quad (37)$$

図-2の実線は、式(38)の条件でのシミュレーションの結果を示している。

$$\bar{R}_d = 5, \quad \sigma_{R_d}^2 = 25, \quad \Delta T = 0.01 \quad (38)$$

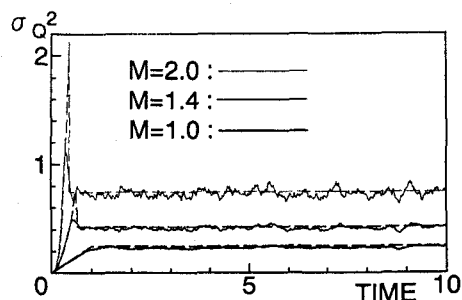


図-2

式(29), (30)を用いた理論計算(破線)では、式(35), (36)を考慮して、 $\bar{R}, \sigma_R^2$ とし式(39)の値を用いる必要がある。

$$\bar{R} = 5, \quad \sigma_R^2 = 0.25 \quad (39)$$

両者は良く適合しており、式(21)を誘導するのにあたって採用した $\frac{1}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial t}$ と

$\tilde{q}$ の従属性が極めて弱いという仮定は妥当であると思われる。

4 貯留型流出モデルの確率応答との比較

藤田³⁾によると式(25), (26)を貯留関

数に変換した結果は、次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dT} = R - Q \quad (40)$$

$$S = \frac{m}{m+1} Q^{1/m} \quad (41)$$

貯留型流出モデルの確率応答は、既に藤田^{1, 2)}らにより研究されており、降雨量が互いに独立な場合の貯留量の平均値、分散 $\bar{S}$, σ_s^2 に関して、次式が提案されている。

$$\frac{d\bar{S}}{dT} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} = \bar{R} \quad (42)$$

$$\frac{d\sigma_s^2}{dT} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \sigma_s^2 = \sigma_R^2 \quad (43)$$

$$K = \frac{m}{m+1} \quad (44)$$

また、流出量の平均値、分散は、次式で与えられる。

$$\bar{Q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} \quad (45)$$

$$\sigma_Q^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \beta^2 \sigma_s^2 \quad (46)$$

式(42)～(46)の α, β は、次の貯留量に関して定義されている。

$$S^m = \alpha \bar{S} + \beta \tilde{S} \quad (47)$$

したがって、式(19), (20)で $\bar{q} \rightarrow \bar{S}$, $\tilde{q} \rightarrow \tilde{S}$ に置き換えて用いる必要がある。

図-3は、Kinematic Waveモデル(実線)と貯留型流出モデル(破線)の流出量の平均を理論計算から求めたものを比較したものである。計算条件として式(39)を用いた。

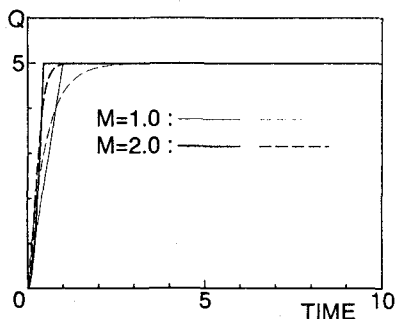


図-3

図-4は同じく、流出量の分散を比較したものである。

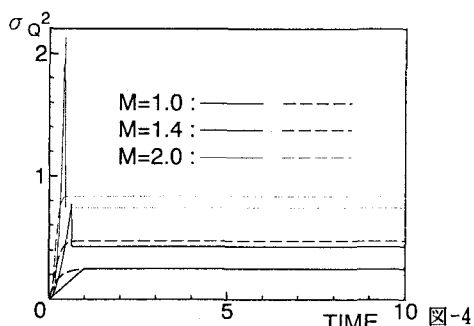


図-4

線形系における定常状態では、平均、分散とも完全に一致している。非線形系においては貯留型流出モデルの分散は、Kinematic Waveモデルの約1.1倍になっている。しかし、 $T=T_c$ (到達時間)ではKinematic Waveモデルの分散は鋭いピークを持っているのに対し、貯留型流出モデルのそれは、これを再現していない。

5 まとめ

Kinematic Waveモデルにおいて降雨量が互いに独立な不規則関数である場合の過渡状態における流出量の平均、分散を求める理論式を誘導した。

次にKinematic Waveモデルから誘導された貯留型流出モデルを用いた流出量の平均と分散をKinematic Waveモデルのそれと比較した。 $T=T_c$ の近傍を除いて、良好な結果を得られた。以上より、流出量の平均と分散は、集中化させたKinematic Waveモデルに不規則な降雨を与えても集中化過程は妥当であるといえる。

参考文献

- 1) 藤田睦博, 中尾隆志: 貯留型流出モデルの確率応答に関する研究, 水工学論文集, 第36巻, pp. 561～566, 1992、2) 藤田睦博, 中尾隆志, 篠原伸和: 貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について, 水工学論文集, 第37巻, pp. 99～104, 1993、3) 藤田睦博: 斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究, 土木学会論文報告集, 第314号, 1981