

I-46

離散化極限解析法による

格子桁の解析について

北海道大学工学部 安念秀剛

北海道大学工学部 正 員 佐藤浩一

北海道大学工学部 正 員 林川俊郎

北海道大学工学部 正 員 小幡卓司

北海道大学工学部 正 員 平沢秀之

1. はじめに

塑性解析法は、骨組構造をはじめ、薄肉構造、地盤、コンクリート構造などの幅広い分野において利用されている。特に、有限要素法によるその解析は、今日、最も一般的なものとなっている。

最近では、塑性力学の進歩にともない構造体の非線形挙動を扱った構造解析が行われるようになってきている。このような流れの中で、川井^{1), 2)}は、固体が載荷の極限においては、いくつかのブロックからなるリンク機構を形成して剛体運動を起こし、不安定になっていく実験的事実に着目して、1976年に有限個の剛体ブロックを分布バネで結合した“剛体-バネモデル”と称する離散系力学モデルを発表した。これが、RBSM (Rigid-Bodies Spring Model)と呼ばれている。

橋梁を設計する上でしばしば直面する格子構造（格子桁）の一般的な解析方法として2次元梁要素モデルによる有限要素解析があるが、本論文は、剛体-バネモデル2次元6自由度梁要素により格子桁の塑性解析を行い、有限要素解析（塑性ヒンジ法）の解析結果と比較し、その概要を報告するものである。

2. RBSM (2次元梁要素の場合)

ここでは、2次元剛体-バネモデルについての剛性方程式を導く。

計算の便宜上、以下の事を仮定する。

- 1) 梁要素の断面の中心線（図心線）は直線である。
- 2) 断面形状は一樣で変形しない。
- 3) 図心軸にZ軸をとる。
- 4) 自由度は要素重心にとる。

この場合の剛体-バネモデルの剛体変位は、

$$(v_1, \theta_1, \chi_1 | v_2, \theta_2, \chi_2) \cdots (1)$$

で与えられ、それに対する応力は、

$$(Y_1, L_1, N_1 | Y_2, L_2, N_2) \cdots (2)$$

である。

2. 1 相対変位-重心の変位の行列 (Bマトリックス)

前述の仮定に基づき、バネ要素の変位（構成する2要素間の相対変位）と、それを構成する要素の重心の変位の関係を導く。そのため、Fig. 1に示すようなモデルを考える。2要素間にはZ軸方向（部材軸方向）の変位 w に抵抗するバネと、X軸、Y軸方向（部材軸直角方向）の変位 u 、 v に抵抗するバネがあり、この3種類の分布バネにより連結されていると考える。

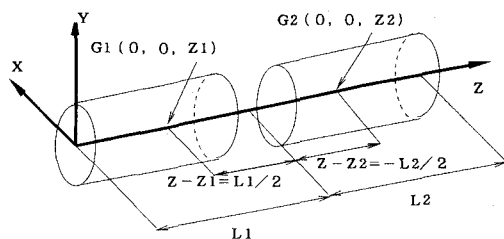


Fig. 1 2次元梁要素

On Analysis of Grillage Girders by Rigid-Bodies Spring Model.

by Hidetake ANNEN, Koichi SATO, Toshiro HAYASHIKAWA, Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA.

最終的に、Bマトリックスは、次のように与えられる。

$$\{\delta\} = [B] \{u\} \tag{3}$$

$$\text{相対変位 } \{\delta\} = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z\}^T \tag{4}$$

$$\text{重心の変位 } \{u\} = \{v_1, \theta_1, \chi_1, v_2, \theta_2, \chi_2\}^T \tag{5}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y & 0 & 0 & -y \\ -1 & L_1/2 & -x & 1 & L_2/2 & x \\ 0 & -y & 0 & 0 & y & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

2. 2 表面力-相対変位 (Dマトリックス)

梁要素のバネ定数 k_s 、 k_d は、次のようにおく。

$$k_s = 2 G / (L_1 + L_2), \qquad k_d = 2 E / (L_1 + L_2) \tag{7}$$

したがって、弾性域でのDマトリックス $[D_e]$ と塑性域でのDマトリックス $[D_p]$ は、それぞれ、式(11)、式(12)のように与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\delta\} \tag{8}$$

$$\text{表面力 } \{\sigma\} = \{\tau_x, \tau_y, \sigma_z\}^T \tag{9}$$

$$\text{相対変位 } \{\delta\} = \{\delta_x, \delta_y, \delta_z\}^T \tag{10}$$

$$[D_e] = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & k_d \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[D_p] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{12}$$

2. 3 剛性行列 (Kマトリックス)

仮想仕事の原理より、

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d s \tag{13}$$

$[K]$ は、 6×6 のバネ剛性マトリックスとなる。

3. 極限解析法

3. 1 非線形解析法

本解析においては荷重増分法 (山田^{4), 5)} の方法を用いた。

山田の方法では、荷重増分量を荷重増分率という形式で求めているので、Fig. 2にこの荷重増分率に関する考え方を示す。

Fig. 2におけるP点は前回までの表面力に関する位置で点Rが今回求めた増分表面力を前回までの表面力に加え合わせた位置である。すなわち、今回の増分表面力はPRである。点Rが明らかに初期降伏曲面上の点Qを越えていればQRという余分な表面力が作用していることになる。そこで、点Rを点Qの位置まで戻し、PQで示される弾性部分のみ取り

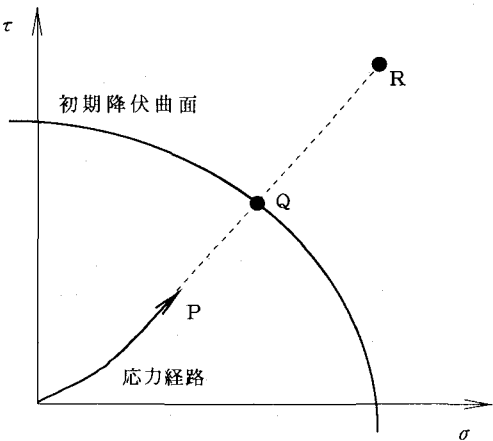


Fig. 2 山田の方法における荷重増分率

残すことを考える。

いま、 $r = P Q / P R$ なる荷重増分率 r を計算し、これを増分表面力に掛け合わせた値を前回までの、すなわち、点 P における表面力に加え合わせれば余分な表面力を持たないことになる。この r を降伏していな

いすべてのバネについて計算し、そのうち最小の値を示す r を r_{min} として今回の荷重増分率とする。

本解析の流れは以下の通りである。

- 1) 荷重増分段階において初めに塑性化したバネと弾性状態のバネについてそれぞれの要素剛性マトリックス $[D_e]$ 、 $[D_p]$ を組み立てる。
- 2) 与えられた荷重に対して1)で求めた剛性マトリックスを解き、増分表面力を求める。この結果得られる表面力を前回の表面力に加え合わせ、その表面力のすべてが降伏強度以下になる荷重増分率を求める。
- 3) この荷重増分率を増分表面力にかけ、前回の表面力に加えることによりこの段階の表面力とする。
- 4) 以上の操作を指定荷重まで繰り返す。

3. 2 破壊基準

本解析では破壊条件式としてミーゼスの条件を用いた。

剛体－バネモデルでは、要素境界辺でのすべり（塑性化）を考える。したがって、境界辺上のバネ要素のベクトル量としての表面力（垂直方向、せん断方向）の合力によって破壊の判定を行う。

ミーゼスの条件（平面応力状態に対して）

$$\left. \begin{aligned} \tau^2 + \sigma^2 / 3 &= c^2 \\ f &= \tau^2 + \sigma^2 / 3 - c^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 c はせん断降伏応力である。

以上の破壊条件、降伏条件にたいして、降伏後のバネ要素の応力（表面力の合力）は、破壊線（面）上を移動するものとする。

弾性時の D マトリックス $[D_e]$ が対角項以外 0 の行列であるのに対し、降伏後の $[D_p]$ には、非対角項にも値が入ってくる。

$$[D_p] = [D_e] - [S] \quad \dots\dots\dots (15)$$

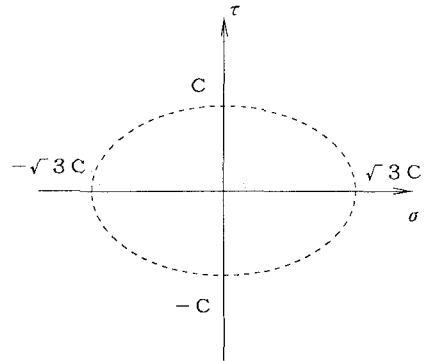


Fig. 3 ミーゼスの条件

$$[S] = \begin{bmatrix} 3 k_s^2 \tau_x^2 & 3 k_s^2 \tau_x \tau_y & k_s k_d \tau_x \sigma_z \\ & 3 k_s^2 \tau_y^2 & k_s k_d \tau_y \sigma_z \\ \text{sim.} & & k_d^2 \sigma_z^2 / 3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)$$

4. 格子桁の数値計算例

Fig.4のような、主桁3本、横桁4本の格子桁の中央に鉛直方向下向き（ Y 軸負の方向）の荷重を載荷し、RBSMにより極限荷重とバネのすべりの進展を追跡する。また、同様に、FEM（塑性ヒンジ法）により極限荷重と塑性ヒンジの発生を追跡する。

主桁、横桁ともにI型断面とし、断面諸元は $I_x=67704[\text{cm}^4]$ 、 $I_y=7205[\text{cm}^4]$ 、 $I_{xy}=0[\text{cm}^4]$ 、 $I_p=74909[\text{cm}^4]$ 、 $J=103[\text{cm}^4]$ 、 $M_{yp}=7145445[\text{kgcm}]$ （全塑性曲げモーメント）、 $T_{sp}=147578[\text{kgcm}]$ （全塑性純ねじりモーメント）である。

RBSMでは、節点数66、要素数71。FEMでは節点数19、要素数24となる。境界条件は全て固定端とする。

極限荷重と載荷点の変位との関係はFig.5に示す。また、バネのすべりの発生(RBSM)と塑性ヒンジの発生(FEM)はそれぞれFig.6、Fig.7に示す。

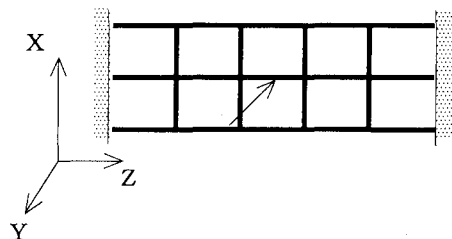


Fig.4 格子桁の数値計算モデル

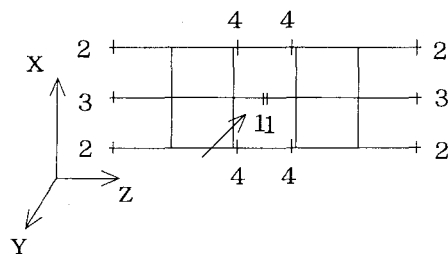


Fig.6 バネのすべりの発生(RBSM)

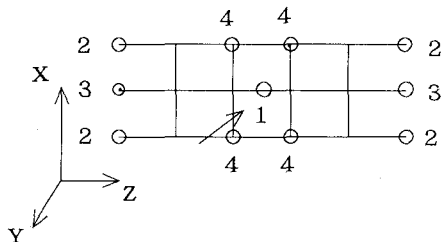


Fig.7 塑性ヒンジの発生(FEM)

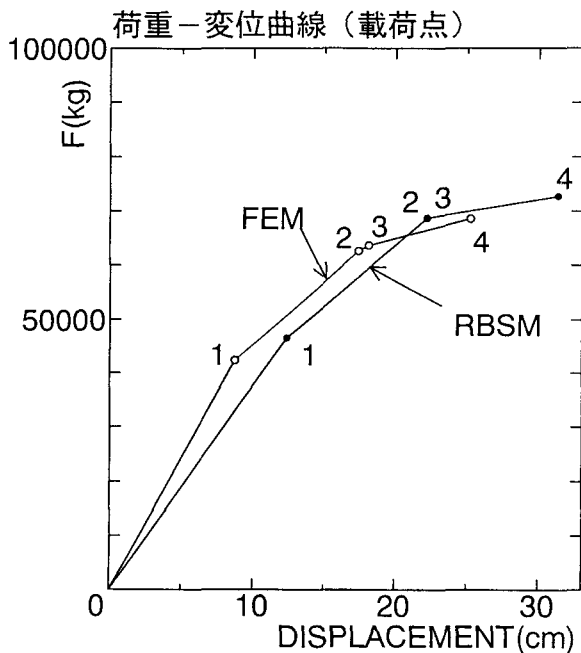


Fig.5 載荷点の荷重-変位曲線
(RBSMとFEM)

5. おわりに

格子桁の極限解析を「剛体-バネモデル」と「塑性ヒンジ法による有限要素解析」で行った。RBSMの極限荷重値はFEMの解析値とよく一致している。一般的に、この種の解析には有限要素解析が行われているが、本研究でのRBSMも十分適用できることがわかる。

なお、本解析にあたってはパソコンを使用し、MS-FORTRAN Ver. 5.1により倍精度で計算を行った。また、連立1次方程式の解法には、メモリーの節約、演算速度の向上が計られるスカイライン法を用いた。

(参考文献)

- 1)川井忠彦：離散化極限解析法概論、培風館、1991。
- 2)川井忠彦、竹内則雄：離散化極限解析プログラミング、培風館、1990。
- 3)竹内則雄：地盤力学における離散化極限解析、培風館、1991。
- 4)山田 昭：塑性、粘弾性、培風館、1980。
- 5)山田 昭：マトリックス法材料力学、培風館、1980。
- 6)佐藤浩一、武田智吉：RBSMによる鋼床版横リブの弾塑性解析について、土木学会北海道支部論文報告集 第48号、pp.15～pp.20、1992。