

I-45

部分加熱を受ける扇形厚板の非定常温度場

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. 緒言

熱伝導の問題は、物理学或いは応用数学における古典的テーマとして、古くから取り扱われている。3次元熱伝導は、座標系を問わずに、特殊な境界条件を除けば、一般的には、解析が難しいようである。特に、熱放散の境界条件を有する非定常3次元熱伝導は、熱伝導論の古典的名著、例えば、Carslaw 及び Jaeger¹⁾ 或いは川下²⁾の書物を見ても、さ程、具体的には述べられていない。

熱伝導の問題は、それ自身が、一つの研究テーマであるばかりでなく、3次元固体の熱応力解析には、欠かせないテーマでもある。円形厚盤或いは円環厚盤などに関する野田ら³⁾及び菅野・木元⁴⁾等の熱応力の研究が多数見受けられるが、研究の主眼が熱応力解析に置かれているため、温度場の解析は、既知の事として、結果のみが述べられている。

本研究は、扇形厚板の非定常熱曲げの解析に必要な温度場の解析を3次元熱伝導論に基づいて行い、扇形厚板の非定常温度分布を明らかにするものである。境界条件は、部分加熱と熱放散とが取り扱われている。

2. 基本解

等方性体の熱伝導の方程式は、次のようなものである。

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 T 、 t 及び κ は、それぞれ、温度、時刻及び温度伝導率を表す。また、 ∇^2 は、円柱座標 (r, θ, z) における Laplace の演算子である。扇形厚板の座標系を図-1のように定めると、式(1)の解は、余関数 T_c と特殊積分 T_p との和で、次の様に表される。

$$T(r, \theta, z, t) = T_c(r, \theta, z) + T_p(r, \theta, z, t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$T_c = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos m\theta [J_m(\gamma_{ml}r) (G_{jl}^{(1)} \cosh \gamma_{ml}z + R_{jl}^{(1)} \sinh \gamma_{ml}z) + Y_m(\gamma_{ml}r) (G_{jl}^{(2)} \cosh \gamma_{ml}z + R_{jl}^{(2)} \sinh \gamma_{ml}z)] \quad (3a)$$

$$T_p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos m\theta \{ \cos q_k z [T_{jlk}^{(1)} J_m(\gamma_{ml}r) + T_{jlk}^{(2)} Y_m(\gamma_{ml}r)] \exp[-\kappa(\gamma_{ml}^2 + q_k^2)t] + \sin p_k z [S_{jlk}^{(1)} J_m(\gamma_{ml}r) + S_{jlk}^{(2)} Y_m(\gamma_{ml}r)] \exp[-\kappa(\gamma_{ml}^2 + p_k^2)t] \} \quad (3b)$$

$$m = j\pi/\gamma \quad (j=1, 3, 5, \dots); \gamma_{ml} = \lambda_{ml}^*/a \quad (4a, b)$$

また、 λ_{ml}^* 、 q_k 及び p_k は、境界条件から定められる超越方程式の根であり、 $G_{jl}^{(1)}$ 、 $\dots$ 、 $S_{jlk}^{(2)}$ は、未定数である。式(3a, b)の解は、円環厚板の解として、また、第二種の Bessel 関数を外すと、円形厚板の解としても使える。式(3b)に含まれる sine 関数は、座標の原点が板の中央面の延長上に置かれている

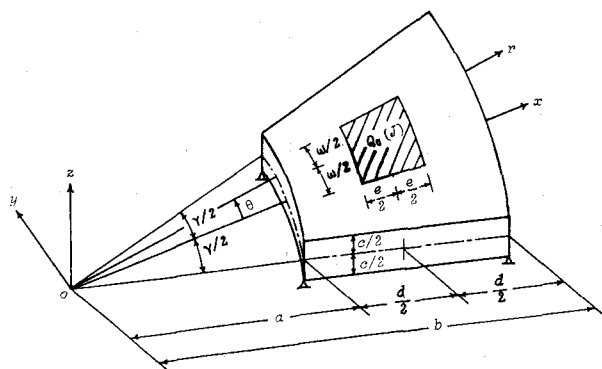


Fig. 1 Coordinate system of thick annular sector plate.

A Transient Temperature Field of a Thick Annular Sector Plate Due to

a Partial Heat Supply

By Isamu A. OKUMURA

場合には必要であり、下面に置かれている場合には不要となる。

3. 境界条件、初期条件及び解

境界条件として、板の上面に部分加熱を受け、下面及び2円弧辺において熱放散があり、2直線辺において温度0の場合を考えると、境界条件は、次式となる。

$$r=a \text{ において、 } \partial T / \partial r - hT = 0 \quad (5a)$$

$$r=b \text{ において、 } \partial T / \partial r + hT = 0 \quad (5b)$$

$$z=c/2 \text{ において、 } \partial T / \partial z + hT = Q(r, \theta) / \lambda \quad (5c)$$

$$z=-c/2 \text{ において、 } \partial T / \partial z - hT = 0 \quad (5d)$$

$$\theta = \pm \pi/2 \text{ において、 } T = 0 \quad (5e)$$

ここで、 h 及び λ は、それぞれ、相対熱伝達率及び熱伝導率を表し、 Q は、加熱 (J) を表す。また、初期条件は、次式とする。

$$t=0 \text{ において、 } T=0 \quad (6)$$

式 (3a, b) に境界条件 (5a) を課すると、次の関係を得る。

$$G_{jl}^{(2)} = -\varepsilon_{ml}^* G_{jl}^{(1)}, \quad R_{jl}^{(2)} = -\varepsilon_{ml}^* R_{jl}^{(1)}, \quad T_{jl}^{(2)} = -\varepsilon_{ml}^* T_{jl}^{(1)}, \quad S_{jl}^{(2)} = -\varepsilon_{ml}^* S_{jl}^{(1)} \quad (7a-d)$$

ここで、

$$\varepsilon_{ml}^* = \frac{\lambda_{ml}^* J_m'(\lambda_{ml}^*) - ah J_m(\lambda_{ml}^*)}{\lambda_{ml}^* Y_m'(\lambda_{ml}^*) - ah Y_m(\lambda_{ml}^*)} \quad (8)$$

上式におけるプライム添字は、一階微分を表す。

式 (7a, b) の関係を用いて、式 (3a) に境界条件 (5b) を課すると、次式を得る。

$$G_{jl}^{(1)} \cosh \gamma_{ml} z [\gamma_{ml} C_m'(\gamma_{ml} b) + h C_m(\gamma_{ml} b)] + R_{jl}^{(1)} \sinh \gamma_{ml} z [\gamma_{ml} C_m'(\gamma_{ml} b) + h C_m(\gamma_{ml} b)] = 0 \quad (9)$$

ここで、 $C_m(\gamma_{ml} b)$ は、次式のように定義された円柱関数である。

$$C_m(\gamma_{ml} r) = J_m(\gamma_{ml} r) - \varepsilon_{ml}^* Y_m(\gamma_{ml} r) \quad (10)$$

式 (9) が z に無関係に成立するためには、

$$\gamma_{ml} C_m'(\gamma_{ml} b) + h C_m(\gamma_{ml} b) = 0, \quad \text{即ち、} \lambda_{ml}^* C_m'(\mu \lambda_{ml}^*) + ah C_m(\mu \lambda_{ml}^*) = 0, \quad \mu = b/a \quad (11)$$

が成立すれば良い。従って、 λ_{ml}^* は、上の超越方程式を満足する第 m, l 番目の正根として選ぶ。その時、式 (3b) も境界条件 (5b) を満足する。式 (7a-d) の関係及び式 (10) の円柱関数を用いると、式 (3a, b) は、次のように書き改められる。

$$T_c = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \cos m \theta C_m(\gamma_{ml} r) (G_{jl}^{(1)} \cosh \gamma_{ml} z + R_{jl}^{(1)} \sinh \gamma_{ml} z) \quad (12a)$$

$$T_p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos m \theta C_m(\gamma_{ml} r) \{ T_{jlk}^{(1)} \cos q_k z \exp [-\kappa(\gamma_{ml}^2 + q_k^2) t] + S_{jlk}^{(1)} \sin p_k z \exp [-\kappa(\gamma_{ml}^2 + p_k^2) t] \} \quad (12b)$$

上面に作用する部分加熱は、 θ に関して偶とし、中央に扇形分布する場合を考えると、次式で表される。

$$Q(r, \theta) = \begin{cases} Q_0 [(a+b-e)/2 < r < (a+b+e)/2 \text{ かつ } -\omega/2 < \theta < \omega/2] \\ 0 \text{ [上記以外の場合] } \end{cases} \quad (13)$$

ここで、 Q_0 は、基準加熱である。上式を式 (11) の下で、次式

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} f_{jl} \cos m \theta C_m(\gamma_{ml} r) \quad (14)$$

のようにFourier-Dini 展開すると、Fourier 係数 f_{jl} は、次式で求められる。

$$f_{jl} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_a^b Q \cos m \theta r C_m(\gamma_{ml} r) dr d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 m \theta d\theta \cdot \int_a^b r C_m^2(\gamma_{ml} r) dr} \quad (15)$$

式(14)を用いて、式(12a)に境界条件(5c,d)を課すると、次の2つの方程式を得る。

$$G_{jl}^{(1)} \left(r_{ml} \sinh \frac{r_{ml} c}{2} + h \cosh \frac{r_{ml} c}{2} \right) + R_{jl}^{(1)} \left(r_{ml} \cosh \frac{r_{ml} c}{2} + h \sinh \frac{r_{ml} c}{2} \right) = \frac{f_{jl}}{\lambda} \quad (16a)$$

$$G_{jl}^{(1)} \left(r_{ml} \sinh \frac{r_{ml} c}{2} + h \cosh \frac{r_{ml} c}{2} \right) - R_{jl}^{(1)} \left(r_{ml} \cosh \frac{r_{ml} c}{2} + h \sinh \frac{r_{ml} c}{2} \right) = 0 \quad (16b)$$

式(16a,b)を $G_{jl}^{(1)}$ 及び $R_{jl}^{(1)}$ について解くと、未定定数が次のように定められる。

$$G_{jl}^{(1)} = \frac{f_{jl}}{2\lambda(r_{ml} \sinh \zeta_{ml}^* + h \cosh \zeta_{ml}^*)} ; R_{jl}^{(1)} = \frac{f_{jl}}{2\lambda(r_{ml} \cosh \zeta_{ml}^* + h \sinh \zeta_{ml}^*)} \quad (17a,b)$$

ここで、 $\zeta_{ml}^* = r_{ml} c/2$ 。式(12b)に境界条件(5c,d)を課すると、次式を得る。

$$\mp T_{jik}^{(1)} \left(q_k \sin \frac{q_k c}{2} - h \cos \frac{q_k c}{2} \right) \exp[-\kappa(r_{ml}^2 + q_k^2)t] + S_{jik}^{(1)} \left(p_k \cos \frac{p_k c}{2} + h \sin \frac{p_k c}{2} \right) \exp[-\kappa(r_{ml}^2 + p_k^2)t] = 0 \quad (18)$$

上式が時刻 t に無関係に成立するためには、

$$q_k \sin \frac{q_k c}{2} - h \cos \frac{q_k c}{2} = 0 ; p_k \cos \frac{p_k c}{2} + h \sin \frac{p_k c}{2} = 0$$

即ち、

$$\frac{q_k c}{2} \sin \frac{q_k c}{2} - \frac{c h}{2} \cos \frac{q_k c}{2} = 0 ; \frac{p_k c}{2} \cos \frac{p_k c}{2} + \frac{c h}{2} \sin \frac{p_k c}{2} = 0 \quad (19a,b)$$

が成立すれば良い。従って、 q_k 及び p_k は、上の超越方程式を満足する第 k 番目の正根として選ぶ。境界条件(5e)は、式(4a)の助変数により、自明に満足される。初期条件(6)を満足するためには、式(12a)をFourier級数に展開する必要がある。式(17a,b)を式(12a)に代入して得られた式を展開すると、次式を得る。

$$T_c = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos m\theta C_m(r_{ml} r) (\bar{c}_k \cos q_k z + \bar{c}_k^* \sin p_k z) \quad (20)$$

ここで、

$$\bar{c}_k = \frac{f_{jl}}{\lambda} \frac{q_k}{r_{ml}^2 + q_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{c h}{2}\right) \sin \frac{q_k c}{2} + \frac{q_k c}{2} \cos \frac{q_k c}{2}} \quad (21a)$$

$$\bar{c}_k^* = -\frac{f_{jl}}{\lambda} \frac{p_k}{r_{ml}^2 + p_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{c h}{2}\right) \cos \frac{p_k c}{2} - \frac{p_k c}{2} \sin \frac{p_k c}{2}} \quad (21b)$$

式(12b)及び式(20)に初期条件(6)を課すると、次式を得る。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos m\theta C_m(r_{ml} r) [(\bar{c}_k + T_{jik}^{(1)}) \cos q_k z + (\bar{c}_k^* + S_{jik}^{(1)}) \sin p_k z] = 0 \quad (22)$$

上式が、 r, θ 及び z に無関係に成立すべきことから、未定定数が次のように定められる。

$$T_{jik}^{(1)} = -\bar{c}_k ; S_{jik}^{(1)} = -\bar{c}_k^* \quad (23a,b)$$

かくして、式(5a-e)の境界条件及び式(6)の初期条件は、全て、厳密に満足された。式(12a)に式(17a,b)を代入し、式(12b)に式(23a,b)を代入して、両者を加えると、次の解を得る。

$$T(r, \theta, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_{jl}}{2\lambda} \cos m\theta C_m(r_{ml} r) \left(\frac{\cosh r_{ml} z}{\varrho_{ml}} + \frac{\sinh r_{ml} z}{\Gamma_{ml}} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \{ U_{mlk} \cos q_k z \exp[-\kappa(r_{ml}^2 + q_k^2)t] - V_{mlk} \sin p_k z \exp[-\kappa(r_{ml}^2 + p_k^2)t] \} \right) \quad (24)$$

ここで、

$$U_{mk} = \frac{q_k}{r_{mi}^2 + q_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{ch}{2}\right) \sin \frac{q_k c}{2} + \frac{q_k c}{2} \cos \frac{q_k c}{2}}; V_{mk} = \frac{p_k}{r_{mi}^2 + p_k^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{ch}{2}\right) \cos \frac{p_k c}{2} - \frac{p_k c}{2} \sin \frac{p_k c}{2}};$$

$$Q_{mi} = r_{mi} \sinh \zeta_{mi}^* + h \cosh \zeta_{mi}^*; I_{mi} = r_{mi} \cosh \zeta_{mi}^* + h \sinh \zeta_{mi}^* \quad (25a-d)$$

4. 計算結果

数値計算は、 $b/a=6.0$, $r=0.5\pi$, $\omega=0.2\pi$, $e/a=2.0$ 及び $c/d=1/4$ を持つ扇形厚板が、 $r=a$ 及び $r=b$ において、断熱の境界条件を有する場合について行った。この時ビオ一数： $H=ch=0.1$ 及びフーリエ数： $t'=\kappa t/a^2=0.01, 0.1, 1.0, \infty$ が用いられた。級数の項数は、 m, s 及び k について、それぞれ、最初の 14 項、70 項及び 30 項を用いた。図-2 に、フーリエ数を変えた時の板の上面 ($z=0.5c$) における r 方向の温度分布を示した。初期条件が $T=0$ であるために、 t' が小さいうちは、 T の値は小さく、 t' が ∞ (定常状態) になると、大きな値を示す。図-3 に、 $t'=1.0$ の場合の板内部における温度分布を示した。 z 方向における減衰が遅く、板の下面においても、比較的大きな値を示す。図-2 及び図-3 に見るように、 T の r 方向における減衰が早く、部分加熱の分布境界 ($r=2.5a, r=4.5a$) において、 T は急激に変化している。

5. 結 語

3次元熱伝導論に基づいて、上面に部分加熱を受け、下面及び2円弧辺が熱放散及び2直線辺が一定温度の境界条件を持つ扇形厚板の非定常温度場を解析した。数値計算においては、2円弧辺が断熱の場合を取り扱った。断熱の場合には、式(8)及び式(11)において、 $h=0$ と置けば良い。その時には、部分加熱 Q の展開は、Fourier-Bessel 展開になり、計算が比較的容易になる。解析結果が、境界条件及び初期条件を十分な精確さで満足していることを、数値的に確認してある。今後、本論文で得られた温度場を用いて、扇形厚板の非定常熱曲げを解析してみたい。

参考文献

- 1) Carslaw, H.S. and Jaeger, J. C.: Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., p.214, Oxford University Press, 1959.
- 2) 川下研介: 熱伝導論, p.254, 生産技術センター, 1975.
- 3) 野田直剛・竹内洋一郎・高倉賢一: 表面が局部加熱される有限広さの厚板の非定常熱応力, 日本機械学会論文集 (A 編), 第 48 巻 427 号, pp. 329-338, 1982.
- 4) 菅野良弘・木元順一: 変厚中空円板の非軸対称非定常熱応力の解析解, 日本機械学会論文集 (A 編), 第 53 巻 494 号, pp. 1927-1932, 1987.

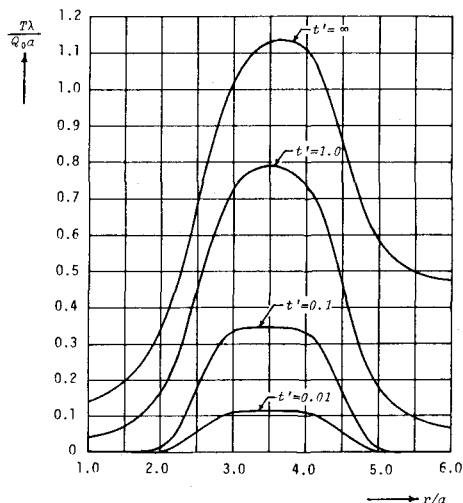


Fig. 2 Distributions of T at top face ($\theta=0, t'=\kappa t/a^2, c/d=1/4$).

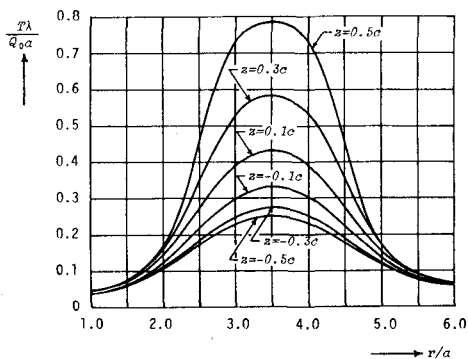


Fig. 3 Variations of T with z for $t'=1.0$ ($\theta=0, c/d=1/4$).