I－29　厚い円筒殻の一振動解析について

北海道大学工学部　正　員　三上　隆
北海道大学工学部　正　員　佐伯　昇
北海道大学工学部　正　員　芳村　仁

1．はじめに

厚い円筒殻(円筒体)の自由振動解析の研究は極めて少ないようである。例えば，Armenakas，GazisおよびHerrmannは両端単純支持された円筒体構造の解析解[1]を求め，GladwellとVijayは3節点三辺形断面軸対称体要素を用いて自由-自由の条件に対して有限要素法(FEM)により解析を行っている[2,3]。またHutchinsonとEl-Azhari[4]は級数解法(SSM)を採用し自由-自由の円筒体の解を求め，WangとBanerjeeは[5,6]境界要素法(BEM)を円筒，ドーム，双曲形状の回転体の自由振動解析に適用している。また，StonekingとBoresiは[7]分割法(PM)を円筒，双曲形状の回転体の解析に用いている。

本報告は，変位(経線，法線および円周方向)成分を厚さ方向座標のべき級数で表示し，変位成分のみで表された運動方程式を選点法[8]で離散化し解析する一近似解析法を提示し，その有効性・適用性の検討を行うものである。

2・基礎方程式

基礎方程式の誘導に当たって，回転体の厚さをhで表し，一定と仮定する。

デカルト座標(X，Y，Z)と曲線座標(x，y)との関係が次式が成り立つ。

$$X=X(x,\ y),\quad Y=Y(x,\ y),\quad Z=Z(x,\ y) \qquad (1)$$

曲面上の近接する2点(x，y)と(x+dx，y+dy)を結ぶ線素の長さdsを近似的に次式で表す。

$$ds^2=A^2dx^2+B^2dy^2 \qquad (2)$$

Lameの定数(α，β)と局面の主曲率半径(R_1，R_2)の間には次式が成立する。

$$\alpha=A(1-z/R_1),\quad \beta=B(1-z/R_2) \qquad (3)$$

ここで，A，Bは曲線座標(x，y)の関数であり，$R_1=R_1(x,\ y)$，$R_2=R_2(x,\ y)$である。

歪み成分には次式を採用する[9]。

$$\varepsilon_x=u_{,x}/\alpha+\alpha_{,z}w/\alpha,\quad \varepsilon_y=v_{,y}/\beta+\beta_{,z}w/\beta+\beta_{,x}u/(\alpha\beta),\quad \varepsilon_z=w_{,z})$$
$$\gamma_{yz}=v_{,z}+w_{,y}/\beta-\beta_{,z}v/\beta,\quad \gamma_{xz}=w_{,x}/\alpha+u_{,z}-\alpha_{,z}u/\alpha,\quad \gamma_{xy}=u_{,y}/\beta+v_{,x}/\alpha-\beta_{,x}v/(\alpha\beta) \qquad (4)$$

ここで，(u，v，w)は(x，y，z)方向の変位成分であり，コンマ(，)の後の添字は偏微分を表す。

変位成分を次のようにzに関する多項式で表す。

$$u=u_0+u_1z+u_2z^2+,\ldots,+u_Kz^K=\sum u_nz^n\quad (n=0,1,\ldots,K) \qquad (5.a)$$
$$v=v_0+v_1z+v_2z^2+,\ldots,+v_Kz^K=\sum v_nz^n\quad (n=0,1,\ldots,K) \qquad (5.b)$$
$$w=w_0+w_1z+w_2z^2+,\ldots,+w_Kz^K=\sum w_nz^n\quad (n=0,1,\ldots,K) \qquad (5.c)$$

ここで，$(u_0,u_1,\ldots,u_K)$，$(v_0,v_1,\ldots,v_K)$および$(w_0,w_1,\ldots,w_K)$はx，yおよび時間tの関数であ。

応力成分(σ_x，σ_y，σ_z，τ_{yz}，τ_{xz}，τ_{xy})とひずみの関係式は以下となる。

$$\sigma_x=c_{11}\varepsilon_x+c_{12}\varepsilon_y+c_{13}\sigma_z,\quad \sigma_y=c_{12}\varepsilon_x+c_{22}\varepsilon_y+c_{23}\varepsilon_z,\quad \sigma_z=c_{13}\varepsilon_x+c_{23}\varepsilon_y+c_{33}\varepsilon_z \qquad (6.a)$$
$$\tau_{yz}=c_{44}\gamma_{yz},\quad \tau_{xz}=c_{55}\gamma_{xz},\quad \tau_{xy}=c_{66}\gamma_{xy} \qquad (6.b)$$

A Numerical Method for Free Vibration Problems of Thick Cylinders
by Takashi MIKAMI, Noboru SAEKI and Jin YOSHIMURA

ここで，c_{11}～c_{66}は弾性係数，ポアソン比等で表される係数である。

ひずみエネルギーに第一変分は次式となる。

$$\delta U=\int\int\int(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\alpha\beta\,dxdydz \quad \cdots\cdots(6)$$

式(4)および(5)を式(6)に代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned}\delta U=\int\int[&BR_x^{(n)}\delta u,_x+B\alpha,_zR_x^{(n)}\delta w+AR_y^{(n)}\delta v,_y+B,_xR_y^{(n)}\delta u+A\beta,_zR_y^{(n)}\delta w+nABT^{(n-1)}\delta w+\\&AS_{yz}^{(n)}\delta w,_y+(n-1)A\beta,_zS_{yz}^{(n)}\delta v+nABS_{yz}^{(n-1)}\delta v+BS_{xz}^{(n)}\delta w,_x+\\&(n-1)B\alpha,_zS_{xz}^{(n)}\delta u+nABS_{xz}^{(n-1)}\delta u+AS_{yx}^{(n)}\delta u,_y+BS_{xy}^{(n)}\delta v,_x-\\&B,_xS_{yx}^{(n)}\delta v]dxdy \quad \cdots\cdots(7)\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&R_x^{(l)}=\int\sigma_x(1-z/R_2)z^ldz, && R_y^{(l)}=\int\sigma_y(1-z/R_1)z^ldz\\&T^{(l)}=\int\sigma_z(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ldz, && S_{yz}^{(l)}=\int\sigma_y(1-z/R_1)z^ldz\\&S_{xz}^{(l)}=\int\tau_{xz}(1-z/R_2)z^ldz, && S_{yx}^{(l)}=\int\tau_{xy}(1-z/R_1)z^ldz\\&S_{xy}^{(l)}=\int\tau_{xy}(1-z/R_2)z^ldz && \cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

であり，積分の下限は$Z=-h/2$，上限は$Z=h/2$である。

運動エネルギーTの変分は次式となる。

$$\delta T=\rho\int\int\int(u\delta u+v\delta v+w\delta w)\alpha\beta\,dxdydz \quad \cdots\cdots(9)$$

ここで，ρは密度であり，ω^2は固有円振動数である。

全ポテンシャルエネルギー$V(=U+T)$の変分$\delta V(=\delta U+\delta T)$を考慮すれば，運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}&\delta u_n;\ \{BR_x^{(n)}\},_x-B,_xR_y^{(n)}-(n-1)B\alpha,_zS_{xz}^{(n)}-nABS_{xz}^{(n-1)}+\{AS_{yx}^{(n)}\},_y+\rho AB\omega^2M_u^{(n)}=0\\&\delta v_n;\ \{AR_y^{(n)}\},_y-(n-1)A\beta,_zS_{yz}^{(n)}-nABS_{yz}^{(n-1)}+\{BS_{xy}^{(n)}\},_x+B,_xS_{yx}^{(n)}+\rho AB\omega^2M_v^{(n)}=0\\&\delta w_n;\ -B\alpha,_zR_x^{(n)}-A\beta,_zR_y^{(n)}-nABT^{(n-1)}+\{AS_{yz}^{(n)}\},_y+\{BS_{xz}^{(n)}\},_x+\rho AB\omega^2M_w^{(n)}=0\\&\qquad\cdots\cdots(10.a,b,c)\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}&M_u^{(n)}=\int u(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz, \quad M_v^{(n)}=\int v(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz\\&M_w^{(n)}=\int w(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz \quad \cdots\cdots(11)\end{aligned}$$

であり，積分の下限は$Z=-h/2$，上限は$Z=h/2$である。

頂点が閉じたドームのような場合を除けば，x=一定における境界条件は，(u_n or $R_x^{(n)}$)，(v_n or $S_{xy}^{(n)}$)および(w_n or $S_{xz}^{(n)}$)の適当な組み合わせで構成される。

式(5)の変位係数(u_n, v_n, w_n)を円周方向(θ)にFourier級数に展開し，以下のように表す。

$$u_n=u_m^{(n)}\cos m\theta,\ v_n=v_m^{(n)}\sin m\theta,\ w_n=v_m^{(n)}\cos m\theta \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに，mは円周方向の波数を表し，($u_m^{(n)}$, $v_m^{(n)}$, $v_m^{(n)}$)は独立変数xのみの関数である。式(12)を用いれば，運動方程式(10)は変位成分のみで表され，それは3(N+1)元の2階の線形常微分方程式系となる。

なお，回転体の中央面における回転半径をR_0と表せば，主曲率半径R_1及びR_2とR_0の関係は以下となる。

$$R_1=-\{1-(R_0,_x)^2\}^{1/2}/(R_0),_{xx},\ R_2=R_0/\{1-(R_0,_x)^2\}^{1/2} \quad \cdots\cdots(13)$$

円筒体の場合には，$R_1=\infty$，$R_2=R_0=a$(中央面における回転半径)であり，また$A=1$，$B=a$が成立する。

3．常微分方程式の近似解

ここでは，空間の離散化には選点法[8]を採用する。選点法の適用における留意事項を以下に記す。なお，独立変数はξ(=x/L;L=経線の長さ)，$0\leq\xi\leq1$で定義されるとする。

①内部選点と端点：　回転体の経線に沿って$0=\xi_0<\xi_1<...<\xi_M<\xi_{M+1}=1$のM+2個の点を配置する。内部選点$\xi_j$(j=1～M)には，M次のshifted Legendre多項式$P_M^*(\xi)$の零点を採用する。ξ_0およびξ_{M+1}は境界条件が指定される点に配置されるので端点と呼ぶ。

②行列[A]と[B]：ξに関する1,2階微分を内部選点および端点における変位値(関数値)に結びつける(M+2)x(M+2)の行列である。変位成分(u_n, v_n, w_n)[n=1～K]の一つをzと記せば，次のような関係式となる。

$$\{z'\}=[A]\{z\},\quad \{z''\}=[B]\{z\} \qquad \text{(14.a,b)}$$

ここで，(M+2)x1次のベクトル，例えば{z}は次のようなものである。

$$\{z\}^T=(z(\xi_0),z(\xi_1),\ldots,z(\xi_{M+1})) \qquad \text{(15)}$$

③$\{z_c\}$と$\{z_e\}$：上式のベクトル{z}は内部選点と端点に関する成分から構成されている。以下ではこれらを分離し，内部選点に関するものには添字cを，端点のそれには添字eを付して表す。

$$\{z_c\}^T=(z(\xi),z(\xi_2),\ldots,z(\xi_M)) \qquad \text{(16.a)}$$

$$\{z_e\}^T=(z(\xi_0),z(\xi_{M+1})) \qquad \text{(16.b)}$$

以上の準備のもとに，3(M+2)(N+1)個の未知数に対する条件および振動数方程式は次のように与えられる。

(1)基礎微分方程式の残差条件(3M(N+1)個の条件)

この条件は，基礎微分方程式の内部選点における残差条件より求められ，以下の代数方程式を得る。

$$[\alpha_c]\{\delta_c\}+[\alpha_e]\{\delta_e\}-\Omega^2[\beta_c]\{\delta_c\}=\{0\} \qquad \text{(17)}$$

ここで，$[\alpha_c]$および$[\alpha_e]$は，行列[A]および[B]の成分で構成されるそれぞれ3M(N+1)x3M(N+1)および3M(N+1)x6(N+1)の行列，$[\beta_c]$は3M(N+1)x3M(N+1)の行列である。またベクトルは以下のように表される。式(16)の表し方に従って示すと次式となる。

$$\{\delta_c\}^T=(\{u_{0c}\}^T,\ldots,\{u_{Nc}\}^T,\{v_{0c}\}^T,\ldots,\{v_{Nc}\}^T,\{w_{0c}\}^T,\ldots,\{w_{Nc}\}^T) \qquad \text{(18.a)}$$

$$\{\delta_e\}^T=(\{u_{0e}\}^T,\ldots,\{u_{Ne}\}^T,\{v_{0e}\}^T,\ldots,\{v_{Ne}\}^T,\{w_{0e}\}^T,\ldots,\{w_{Ne}\}^T) \qquad \text{(18.b)}$$

(2)境界条件式(6(N+1)個の条件)

端点$\xi_0=0$および$\xi_{M+1}=1$で規定される一般的な境界条件式は，(u_n or $R_x^{(n)}$)，(v_n or $S_{xy}^{(n)}$)および(w_n or $S_{xz}^{(n)}$)の適当な組み合わせで構成され，以下のように整理される。

$$[\gamma_c]\{\delta_c\}+[\gamma_e]\{\delta_e\}=\{0\} \qquad \text{(19)}$$

ここで，$[\gamma_c]$と$[\gamma_e]$はそれぞれ，6(N+1)x3M(N+1)および6(N+1)x6(N+1)のマトリックスである。

頂点が閉じたドームのような場合は，頂点で成立する制約条件を一端における境界条件として課せばよく，Greenbaum[10]の考え方を参考にすれば，円周方向の波数mに応じて以下のようになる。

$$m=0;\quad u_n=v_n=w_{n,x}=0 \qquad \text{(20.a)}$$

$$m=1;\quad (u_n+v_n)=w_n=u_{n,x}=0 \qquad \text{(20.b)}$$

$$m\geq 2;\quad u_n=v_n=w_{n,}=0 \qquad \text{(20.c)}$$

(3)振動数方程式

振動数方程式は式(17)および式(19)より次のように得られる。式(19)を$\{\delta_e\}$について解けば次式が得られる。

$$\{\delta_e\}=-[\gamma_e]^{-1}[\gamma_c]\{\delta_c\} \qquad \text{(21)}$$

上式を式(17)に代入すれば，次の振動数方程式が得られる。

$$[\alpha]\{\delta_c\}-\Omega^2[\beta_c]\{\delta_c\}=\{0\} \qquad \text{(22)}$$

ここで，Ω^2=無次元化固有振動数パラメータ，$[\alpha]$は3M(N+1)x3M(N+1)の固有マトリックスで次式で与えられる。

$$[\alpha]=[\alpha_c]-[\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c] \qquad \text{(23)}$$

式(22)を解けば，3M(N+1)の固有値Ω^2とそれに対応する内部選点における固有ベクトル$\{\delta_c\}$が得られる。端点における固有ベクトル$\{\delta_e\}$は，式(21)より求められる。

参考文献

1)A.E. Armenakas, D.C. Gazis and G. Herrmann: Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, Pergamon Press, 1969.

2)G.M.L. Gladwell and D.K Vijay: Vibration analysis of axisymmetric resonators, Journal Sound and Vibration, Vol. 42, PP. 137-145, 1975.

3)G.M.L. Gladwell and D.K Vijay: Natural frequencies of free finite length circular cylinders, Journal Sound and Vibration, Vol. 42, PP. 387-397, 1975.

4)J.R. Hutchinson and S.A El-Azhari: Vibrations of free hollow circular cylinders, Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, PP. 641-646, 1986.

5)H-C. Wang and P.K. Banerjee: Axisymmetric free-Vibration problems by boundary element method, Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, PP. 437-442, 1988.

6)H-C. Wang and P.K. Banerjee: Free vibration of axisymmetric solids by BEM using particular integrals, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol 29, pp. 985-1001, 1990.

7)J.E. Stoneking and A.P. Boresi: A theory for free vibration of orthotropic shells of revolution, Nuclear Engineering and Design, Vol. 14, PP. 271-285, 1970.

8)T. Mikami and J. Yoshimura: The collocation method for analyzing free vibration of shells of revolution with either internal or external fluids, Computers & Structures, Vol. 44, PP. 343-351, 1992.

9)A.E. Love: A treaties on the Mathematical thory of elasticity, fourth edi. CAMBRIDGE AT THE UNIVERSITY PRESS, 1959.

10)K. Greenbaum: Comments on 'Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution', AIAA J, Vol. 2, pp. 590-591, 1964.