I－28　　衝撃荷重を受ける円形アーチの解析

北海道大学工学部　正　員　三上　　隆
開発局土木研究所　正　員　佐藤　昌志
北海道大学工学部　学正員　斉藤　知秀
北海道大学工学部　正　員　佐伯　　昇
北海道大学工学部　正　員　芳村　　仁

1．はじめに

本研究は，任意支持条件の円形アーチが面内に衝撃荷重を受ける場合の動的挙動をせん断変形・回転慣性の影響を考慮したアーチ理論に基づいて明らかにしようとするものである。

円形アーチはその優れた特性のため，多くの工学分野で使用されている。そのため基本的な動的特性の情報を提供する面内振動の問題は，Den Hartong[1]を始めとして数多くの研究が古くからなされているが，衝撃問題に対しては，例えば，古典円弧梁理論に基づいた松本らの両端回転自由の場合の研究[2]，高野らの二次元平面問題として解析した両端回転自由の場合の研究[3]等非常に少なく，衝撃応答特性は十分に解明されたとは言い難い。また衝撃問題，特に応力波の伝播を考慮する必要のある初期応答の解明には，せん断変形・回転慣性の影響が大きいことが知られているが，これらを考慮した研究は見当たらないようである。

2．基礎方程式

基礎式には，Morley[4]によるものを採用する。中立軸の曲率半径がRの一様なアーチを考える。周方向の座標をS(=Rθ)，開き角をαで表す。基礎方程式は以下で与えられる。

$$RQ_{x,S}+N-\rho AR(1+k^2)u_{,TT}=p_u \quad \cdots\cdots (1.a)$$

$$M_{y,S}+Q_x-\rho AR(k_1^2 w_{,TT}+k_2^2 R\phi_{,TT})=p \quad \cdots\cdots (1.b)$$

$$RN_{,S}-Q_x-\rho AR\{(1+k^2)w_{,TT}+Rk_1^2\phi_{,TT}\}=p_w \quad \cdots\cdots (1.c)$$

ここで，コンマ(,)に続く添字(S,T)は編微分を表し，ρは密度，Aは断面積，uは半径方向変位，wは接線方向変位，ϕは曲げのみによる回転角である。またp_uおよびp_wはそれぞれ，半径方向および接線方向の作用荷重である。

k^2，k_1^2およびk_2^2は，次式で定義される無次元量である。

$$k^2=-(1/A)\int\int_A \xi\, dA,\qquad k_1^2=-(1/A)\int\int_A \xi(1-\xi)dA \quad \cdots\cdots (2.a,b)$$

$$k_2^2=(1/A)\int\int_A \xi^2(1-\xi)dA \quad \cdots\cdots (2.c)$$

ここで，x=Rξは中立軸から半径方向に測った長さであり，中立軸は次式より定められる。

$$\int\int_A \xi/(1-\xi)dA=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

せん断力Q_x，曲げモーメントM_yおよび軸力Nは，以下で与えられる。

$$Q_x=\kappa GA(w+u_{,S}-\phi),\qquad M_y=EAR^2k^2\phi_{,S} \quad \cdots\cdots (4.a,b)$$

$$N=EA(w_{,S}-u/R) \quad \cdots\cdots (4.c)$$

ただし，E=弾性係数，G=せん断弾性係数であり，κ=せん断補正係数である。

境界条件は以下となる。

自由：　$Q_x=M_y=N=0$,　単純支持：　$u=w=M_y=0$,　固定：　$u=w=\phi=0$ ……(5.a,b,c)

Dynamic Response Analysis of Circular Arches

by Takshi MIKAMI, Masashi SATOU, Tomohide SAITO, Noboru SAEKI and Jin YOSHIMURA

ここで簡単化のため，次のような無次元量を導入する。

$s=S/L$(L=円弧に沿って測った長さ)，$t=cT/R(c=(E/\rho)^{1/2})$

$u^*=u/R$, $w^*=w/R$, $\phi^*=\phi$, $p_u^*=Rp_u/(EA)$, $p_w^*=Rp_w/(EA)$

$N^*=N/(EA)$, $Q_x^*=Q_x/(EA)$, $M_y^*=M_y/(EAR)$

以上の無次元量を用いれば，断面力は次式で表される。

$$N^*=(R/L)w^*{}_{,s}-u^*,\quad Q_x^*=\{\kappa/2(1+\nu)\}\{w^*+(R/L)u^*{}_{,s}-\phi^*\} \quad \cdots\cdots (6.a,b)$$

$$M_y^*=k^2(R/L)\phi^*{}_{,s} \quad \cdots\cdots (6.c)$$

基礎方程式を変位成分で表せば以下となる。

$$C_1u^*{}_{,ss}-u^*+C_2w^*{}_{,s}-C_3\phi^*{}_{,s}-(1+k^2)u^*{}_{,tt}=p_u^* \quad \cdots\cdots (7.a)$$

$$C_4u^*{}_{,s}+C_5w^*+C_6\phi^*{}_{,ss}-C_7\phi^*-k_1{}^2w^*{}_{,tt}-k_2{}^2\phi^*{}_{,tt}=0 \quad \cdots\cdots (7.b)$$

$$C_8u^*{}_{,s}+C_9w^*{}_{,ss}-C_{10}w^*+C_{11}\phi^*-(1+k^2)w^*{}_{,tt}-k_1{}^2\phi^*{}_{,tt}=p_w^* \quad \cdots\cdots (7.c)$$

ここで係数C_1～C_{11}は以下で与えられる。

$C_1=(R/L)_2\kappa/2(1+\nu)$, $C_2=(R/L)\{1+\kappa/2(1+\nu)\}$, $C_3=-(R/L)\kappa/2(1+\nu)$

$C_4=-C_3$, $C_5=\kappa/2(1+\nu)$, $C_6=k^2(R/L)_2$, $C_7=-C_5$

$C_8=C_3$, $C_9=(R/L)_2$, $C_{10}=-C_5$, $C_{11}=C_5$

3．基礎方程式の離散化

ここでは，空間の離散化には選点法[5]を，時間の離散化にはNewmark法[6]を採用する。アーチを円弧に沿ってN個の要素に分割し，K番目の要素を(k)要素と名付け，境界条件が規定されるアーチの両端を境界点 1,N+1，分割点を2,3,...,Nと番号付けをする。各要素で成立する基礎式の位置に関する独立変数sは$0\leqq s\leqq 1$で定義されるものとする。さて，選点法の適用における必要事項を以下に記す。

①内部選点と端点：各要素の円弧に沿って$0=s_0<s_1<...<s_M<s_{M+1}=1$のM+2個の点を配置する。内部選点$s_j$ ($j=1$～M)には，M次のshifted Legendre多項式$P_M^*(s)$の零点を採用する。s_0, s_{M+1}は，境界条件が指定される点や分割点に配置されるので端点と呼ぶ。

②行列[A]と[B]：各要素において，時刻tでのsに関する1,2階微分を時刻tでの内部選点，端点における変位値(関数値)に結びつける(M+2)x(M+2)の行列である。(k)要素の変位成分($u^{(k)}$, $w^{(k)}$, $\phi^{(k)}$)の一つを$z^{(k)}$と記せば，次のような関係式となる。

$$\{z'^{(k)}\}=[A]\{z^{(k)}\},\quad \{z''^{(k)}\}=[B]\{z^{(k)}\} \quad \cdots\cdots (8.a,b)$$

ここで，(M+2)x1次のベクトル，例えば$\{z^{(k)}\}$は次のようなものである。

$$\{z^{(k)}\}^T=(z(s_0)^{(k)},z(s_1)^{(k)},...,z(s_{M+1})^{(k)}) \quad \cdots\cdots (9)$$

③$\{z_c^{(k)}\}$と$\{z_e^{(k)}\}$：$\{z^{(k)}\}$は内部選点と端点に関する成分から構成されている。以下ではこれらを分離し，内部選点に関するものには添字cを，端点のそれには添字eを付して表す。

$$\{z_c^{(k)}\}^T=(z(s_1)^{(k)},z(s_2)^{(k)},...,z(s_M)^{(k)}) \quad \cdots\cdots (10.a)$$

$$\{z_e^{(k)}\}^T=(z(s_0)^{(k)},z(s_{M+1})^{(k)}) \quad \cdots\cdots (10.b)$$

1)空間領域の離散化

以上の準備のもとに，N個の要素分割による3(M+2)N個の未知数に対する条件は次のように与えられる。

(1)基礎微分方程式の残差条件(3MN個の条件)

この条件は，基礎微分方程式の内部選点における残差条件より求められ，(k)要素に着目すれば次の時間に関するマトリックス常微分方程式を得る。

$$[\alpha_c^{(k)}]\{\delta_c^{(k)}\}+[\alpha_e^{(k)}]\{\delta_e^{(k)}\}=\{P_c^{(k)}\}+[\beta_c^{(k)}]\{\delta_{c,tt}^{(k)}\} \quad (k=1\sim N) \quad \cdots\cdots (11)$$

ここで，$[\alpha_c^{(k)}]$および$[\alpha_e^{(k)}]$は，行列[A],[B]の成分で構成されるそれぞれ3Mx3Mおよび3Mx6の行列，$[\beta_c^{(k)}]$は3Mx3Mの行列である。またベクトル,例えば，$\{\delta_c^{(k)}\}$，$\{\delta_e^{(k)}\}$は式(10)の表し方に従って示す

と次式となる。

$\{\delta_c^{(k)}\}^T=(\{u_c^{(k)}\}^T,\{v_c^{(k)}\}^T,\{\phi_c^{(k)}\}^T)$ ....(12.a)

$\{\delta_e^{(k)}\}^T=(\{u_e^{(k)}\}^T,\{v_e^{(k)}\}^T,\{\phi_e^{(k)}\}^T)$ ....(12.b)

構造全体系(N分割)に対しては，次式が得られる。

$[\alpha_c]\{\delta_c\}+[\alpha_e]\{\delta_e\}=\{P_c\}+[\beta_c]\{\ddot{\delta}_c\}$ ....(13)

ここで，$[\alpha_c]$と$[\beta_c]$は3MNx3MNの，$[\alpha_e]$は3MNx6NNのマトリックスであり，例えば，

$[\alpha_j]=\mathrm{diag}[[\alpha_j^{(1)}],[\alpha_j^{(2)}],...,[\alpha_j^{(N)}]]$ $(j=c,e)$ ....(14.a)

$[\beta_c]=\mathrm{diag}[[\beta_c^{(1)}],[\beta_c^{(2)}],...,[\beta_c^{(N)}]]$ ....(14.b)

$\{\delta_j\}^T=(\{\delta_j^{(1)}\}^T,\{\delta_j^{(2)}\}^T,...,\{\delta_j^{(N)}\}^T)$ $(j=c,e)$ ....(14.c)

等である。

(2)境界条件式(6個の条件)と分割点における接続条件式(6N-6個の条件)

境界点 1とN+1では，それぞれ3個の条件が規定される。これらを以下のように表す。

$[\gamma_c^{(k)}]\{\delta_c^{(k)}\}+[\gamma_e^{(k)}]\{\delta_e^{(k)}\}=\{0\}$ $(k=1,N)$ ....(15)

分割点では，変形量$\{X\}^T=\{u,v,\phi\}$と力学量$\{T\}^T=\{Q_x,M_y,N\}$に関して次式が成立する。

$\{X^{(i-1)}\}=\{X^{(i)}\}$, $\{T^{(i-1)}\}=\{T^{(i)}\}$ $(i=2\sim N)$ ....(16)

上式の一般形を行列表示すれば次式となる。

$[\gamma_{i,c}^{(i-1)}]\{\delta_c^{(i-1)}\}+[\gamma_{i,e}^{(i-1)}]\{\delta_e^{(i-1)}\}+[\gamma_{i,c}^{(i)}]\{\delta_c^{(i)}\}+[\gamma_{i,e}^{(i)}]\{\delta_e^{(i)}\}=\{0\}$ ..(17)

ただし，$i=2\sim N$。

式(15)と式(16)を一つの方程式にまとめれば以下となる。

$[\gamma_c]\{\delta_c\}+[\gamma_e]\{\delta_e\}=\{0\}$ ....(18)

ここで，$[\gamma_c]$と$[\gamma_e]$はそれぞれ，6Nx3MNおよび6Nx6Nのマトリックスである。

2)時間領域の離散化

式(18)を$\{\delta_e\}$について解き，それを式(13)に代入すれば$\{\delta_c\}$に関する次の時間に関する常微分方程式が得られる。

$[\beta_c]\{\delta_{c,tt}\}-[\alpha]\{\delta_c\}+\{P_c\}=\{0\}$ ....(19)

ただし，

$[\alpha]=[\alpha_c]-[\alpha_e][\gamma_e]^{-1}[\gamma_c]$ ....(20)

式(19)にNewmark法を適用すれば，次の時間積分スキームが構成される。時間刻み幅をΔtとすれば，

$[K]\{\delta_c(t+\Delta t)\}=\{F(t+\Delta t)\}$ ....(21)

ここで，

$[K]=a_0[\beta_c]-[\alpha]$ ....(22.a)

$\{F(t+\Delta t)\}=[\beta_c](a_1\{\delta_c(t)\}+a_2\{\dot{\delta}_c(t)\}+a_3\{\ddot{\delta}_c(t)\})-\{P_c(t+\Delta t)\}$ ....(22.b)

ただし，$a_0=1/\alpha\Delta t^2$, $a_1=\delta/\alpha\Delta t$, $a_2=1/\alpha\Delta t$, $a_3=1/2\alpha-1$,

$\delta\geqq 0.50$, $\alpha\geqq 0.25(0.5+\delta)^2$, $1/2+\alpha+\delta\geqq 0$

4. 数値計算例

自由振動問題の解析結果(無次元固有円振動数$\Omega=\omega R/c$, ω=固有円振動数)を表-1に示す。アーチは開き角αが60°，180° の両端回転支持の場合で，内部選点数をM=15，せん断補正係数$\kappa=0.85$とした。細長比$S_y=(AR^2/I_y)^{1/2}$(I_y=断面2次モーメント)=20,100に対する低次4つモード(n=1～4)は伝達マトリックス法による結果[7]と良い一致が得られている。衝撃挙動については当日に報告する。

表-1 無次元固有円振動数Ωの比較(両端回転支持)

		選点法		伝達マトリックス法	
S_y	n	α=60°	α=180°	α=60°	α=180°
20	1	1.185	0.207	1.185	0.207
	2	1.938	0.426	1.937	0.426
	3	3.117	0.771	3.117	0.770
	4	3.500	0.895	3.499	0.895
100	1	0.528	0.044	0.528	0.044
	2	0.760	0.096	0.760	0.096
	3	1.178	0.178	1.178	0.178
	4	1.708	0.272	1.708	0.272

参考文献

1)J.P. Den Hartong: The lowest natural frequency of circular arcs, Phil. Mag., 5, pp.400-408, 1928.

2)松本浩之, 中原一郎, 小林暁：集中衝撃荷重を受ける両端回転自由の円弧はり, 日本機械学会論文集(A編), 47巻415号, PP.313-320, 昭和56年.

3)H. Takano, S.G. Nomachi and K. Kishi: The dynamic response of arches inder impact load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.30, pp.303-312, 1981.

4)L.S.D. Morley: Elastic waves in a naturally curved rod, Quarterly Journal Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 14, pp.155-172, 1961.

5)三上隆, 芳村仁：選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析, 土木学会論文集, 第374号/I-6, PP.319-328, 1986.

6)K.J. Bathe and E.L. Wilson: Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

7)T. Irie, G. Yamada and K. Tanaka: Natural frequencies of in-plane vibration of arcs, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50. PP. 71- 74, 1983.