

I-27

多項式の級数を用いた節点帯板法の収束性^{*1}

函館工業高等専門学校 正員 渡辺 力
 長岡技術科学大学 正員 林 正
 函館工業高等専門学校 正員 外崎 忍

1. まえがき

節点帯板法¹⁾ (Finite Nodal-Strip Method : NSM) は、長大薄肉構造物を効率良く全体解析するために開発された解析法である。この解法は有限帯板法 (Finite Strip Method : FSM) で用いられる帯板要素に節点自由度を付与することで F S M の適用範囲を拡張したもので、有限要素法 (Finite Element Method : FEM) の汎用性と F S M の計算効率の良さを併せ持つ。最近では、実橋に適用するための構造解析システムの開発や任意形状の Mindlin 節点帯板要素の開発が行われている。本研究では、従来の節点帯板法²⁾ の精度と計算効率の改善を目的として変位関数を再検討した。変位関数において、従来用いられていたはりの振動方程式の解である固有関数の代わりに多項式の級数を用いて変位を級数展開することで収束性が大幅に改善され、固有関数を用いた場合に生じる要素内での応力の振動する傾向も無くなった。この多項式の級数を用いた N S M を種々の境界条件の平板の解析に適用して精度と収束性を確認した結果を報告する。なお、これらの多項式の級数は、論文 3) や 4) で任意形状の F S M に用いられ良好な解を得ている。

2. 変位関数

(1) 節点帯板要素

節点帯板要素は、図-1 に示すように長さ $2a$ 、幅 $2b$ 、厚さ t の長方形要素で、要素中央面上の4個の隅角点に節点、 x 軸に平行な2本の境界線に節線を持つ。また、節点番号および節線番号、正規座標 (ξ, η) 、要素座標 (x, y, z) を図のように定める。

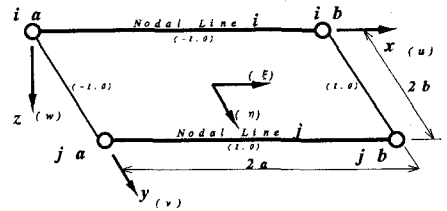


図-1 節点帯板要素

節点 i a の一般化変位 d_{ia} 及び節線 i の一般化変位 d_{im} は次のようなものを用いる。

$$d_{ia} = \{u, v, v_x, w, w_x, w_y\}_{ia}^T, \quad d_{im} = \{u, v, w, w_y\}_{im}^T \quad (1)$$

ここに、 u, v, w などは各座標軸方向の並進変位であり、添字 x, y はそれぞれ座標 x, y に関する微係数を表す。

一つの節点帯板要素の節点に関する一般化変位 d_0 と節線に関する一般化変位の第 m 項 d_m は、式 (1) を用いて次のように表される。

$$d_0 = \{d_{ia}^T, d_{ja}^T, d_{ib}^T, d_{jb}^T\}^T, \quad d_m = \{d_{im}^T, d_{jm}^T\}^T \quad (2)$$

(3) 変位関数

要素中央面上の変位は、節点と節線の変位の和として次式のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 = f_{01}^T d_0 + f_{11}^T \sum_m U_m d_m \\ v &= v_0 + v_1 = f_{02}^T d_0 + f_{12}^T \sum_m V_m d_m \\ w &= w_0 + w_1 = f_{03}^T d_0 + f_{13}^T \sum_m W_m d_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 f_{01}, f_{02} は x に関する1次または3次多項式、 f_{03} は x, y に関する3次多項式を要素とする形状

^{*1} A Cnvergence Characteristic of Finite Nodal-Strip Method Using Series of Polynomials.

by Chikara WATANABE, Masa HAYASHI and Shinobu TONOZAKI

関数ベクトルであり、 f_{11}, f_{12} は y に関する1次多項式、 f_{13} は y に関する3次多項式を要素とする形状関数ベクトルである。 U_m, V_m, W_m は次のような展開関数である。

(4) 展開関数

本研究では次に示す固定の条件を満たす多項式を用いる。

$$U_m(\xi) = (1 - \xi^2)\xi^{m-1}, \quad V_m(\xi) = W_m(\xi) = (1 - \xi^2)^2 \xi^{m-1} \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

従来、展開関数として次に示す三角関数とよりの振動方程式の解である固有関数を組み合わせものを用いていた。式(6)の α_m, μ_m は両端固定ばりの振動方程式から求められる定数である。

$$U_m(\bar{\xi}) = \sin \mu_m \bar{\xi}, \quad V_m(\bar{\xi}) = W_m(\bar{\xi}) = X_m(\bar{\xi}) \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} X_m(\bar{\xi}) &= \sin \alpha_m \bar{\xi} - \sinh \alpha_m \bar{\xi} - \mu_m (\cos \alpha_m \bar{\xi} - \cosh \alpha_m \bar{\xi}) \\ \bar{\xi} &= (1 + \xi)/2, \quad (0 \leq \bar{\xi} \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

3. 節点帯板法の定式化

(1) ひずみ-変位関係式

要素内の任意点のひずみ成分は次式のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式を次のようにおく。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = \{e_1, e_2, e_3\}^T \quad (8)$$

上式に式(3)を代入して次式を得る。

$$e_i = \mathbf{b}_{0i}^T \mathbf{d}_0 + \sum_m \mathbf{b}_{mi}^T \mathbf{d}_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_{01} &= \partial f_{01} / \partial x - z(\partial^2 f_{03} / \partial x^2) \\ \mathbf{b}_{02} &= \partial f_{02} / \partial y - z(\partial^2 f_{03} / \partial y^2) \\ \mathbf{b}_{03} &= \partial f_{01} / \partial y + \partial f_{02} / \partial x - 2z(\partial^2 f_{03} / \partial x \partial y) \\ \mathbf{b}_{m1} &= U'_m f_{11} - z W''_m f_{13} \\ \mathbf{b}_{m2} &= V'_m \partial f_{12} / \partial y - z W'_m (\partial^2 f_{13} / \partial y^2) \\ \mathbf{b}_{m3} &= U'_m \partial f_{11} / \partial y + V'_m f_{12} - 2z W'_m (\partial f_{13} / \partial y) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

なお、プライムは x に関する微分を表す。

(2) 要素の平衡方程式

応力-ひずみ関係式は、弾性行列 $\mathbf{D}$ を用いて次式のように表すことができる。

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{D} = [D_{ij}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{1 - \nu}{2} \quad (11)$$

ここに、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

仮想変位 $\delta \mathbf{d}_0$ 及び $\delta \mathbf{d}_m$ による仮想ひずみエネルギー δU は、式(8)と(11)を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \sum_j \sum_i \int_V D_{ij} e_j \delta e_i dV \\ &= \delta \mathbf{d}_0^T \left\{ [k_{00}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [k_{0n}] \mathbf{d}_n \right\} + \sum_m \delta \mathbf{d}_m^T \left\{ [k_{m0}] \mathbf{d}_0 + \sum_n [k_{mn}] \mathbf{d}_n \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、一般化変位 d_0, d_m に対応する一般化力を q_0, q_m 、要素上に作用する荷重の等価節点及び節線外力を p_0, p_m とすれば、仮想仕事の原理を用いて次式の平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [k_{00}]d_0 + \sum [k_{0n}]d_n &= q_0 + p_0 \\ [k_{m0}]d_0 + \sum [k_{mn}]d_n &= q_m + p_m \quad (m=1,2,3,\cdots) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

4. 数値計算例

(1) 平面応力解析

板の寸法と材料定数には次の値を用いる。

$$b=1.0, \quad t=1.0, \quad E=1000.0, \quad \nu=0.0$$

(a) 単純支持板

図-2に示すような両端で単純支持($v=0$)された長方形板の上縁に等分布荷重($q=1$)が作用する場合を解析する。板の形状は $a/b=5$ とし、対称条件を考慮して片側半分を4分割して計算する。

弾性論の解と上縁の変位(v)を比較した結果を表-1に示す。展開項数を3項用いた時の上縁の応力(σ_x)の分布を図-3に示す。 v は級数の違いによる影響はほとんど無く、展開項数を3項用いれば完全に収束している。 σ_x は三角関数と固有関数の級数を用いた場合に単純支持点でかなり大きな値が生じ、全体が振動していることがわかる。多項式の級数を用いた場合は、 σ_x も3項で収束している。

表-1 両端単純支持板の変位

Xm	m	x/a				
		0	0.125	0.25	0.375	0.5
v	Poly.	0	-0.904	0.851	0.820	0.811
		1	-0.979	0.979	0.989	0.996
		3	-0.995	0.996	0.996	0.996
		5	-0.995	0.996	0.996	0.996
		0	-0.904	0.851	0.820	0.811
	Tri.	1	-0.974	0.977	0.987	0.994
		3	-0.992	0.995	0.995	0.996
	Eigen.	5	-0.994	0.995	0.996	0.996
		-	1.0	1.0	1.0	1.0
	Analytical.	(0)	(.04161)	(.07561)	(.09785)	(.1056)

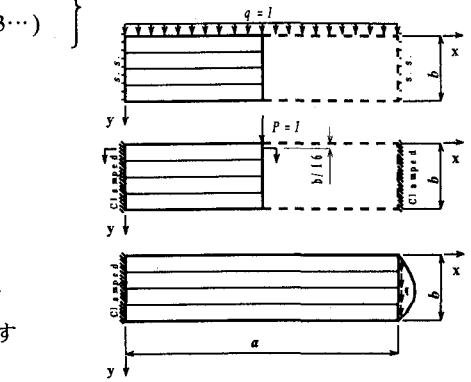


図-2 平面応力解析

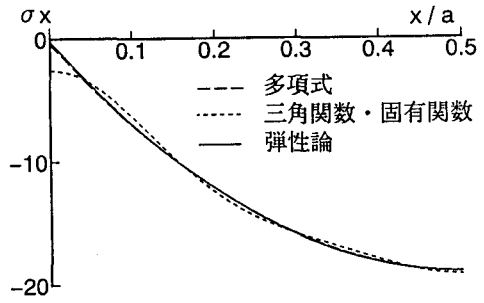


図-3 両端単純支持板の応力(3項)

(b) 両端固定支持板

図-2に示すような両端で固定支持($u=0, v=0$)された長方形板の支間中央に集中荷重($P=1$)が作用する場合について解析する。板の形状及び要素分割は単純支持板と同様である。

展開項数を5項用いた時の応力(σ_x)をFEM解(8節点セレンディピティ要素 8×20 分割)と $y=b/16$ の位置で比較した結果を図-4に示す。三角関数と固有関数の級数を用いた場合、固定支持端と荷重載荷点近傍の値が悪く、全体が振動している。多項式の級数を用いた場合には、FEM解と良く一致している。また、この解析例では、荷重載荷点近傍の σ_x を求めるために展開項数を5項用いる必要がある。

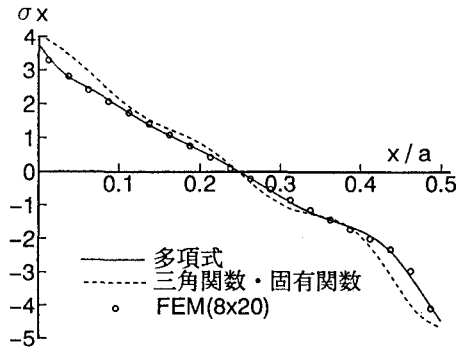


図-4 両端固定支持板の応力(5項)

(c) 片持ち板

図-2に示す片持ち板の自由端に放物線状に分布するせん断力($q=1$)が作用する場合について解析する。板の形状を $a/b=5$ とし4要素を用いる。境界条件は固定端の下端のみ $u=0, v=0$ とし他は $u=0$ とした。

展開項数を3項用いた時の上縁の応力(σ_x)の分布を図-5に示す。この解析例では σ_x が直線となるが、三角関数と固有関数の級数を用いた場合は振動する傾向にある。それに比べ、多項式の級数を用いた場合は完全に解析解に一致している。(多項式の級数を用いた場合は変位、応力とも1項で収束する)

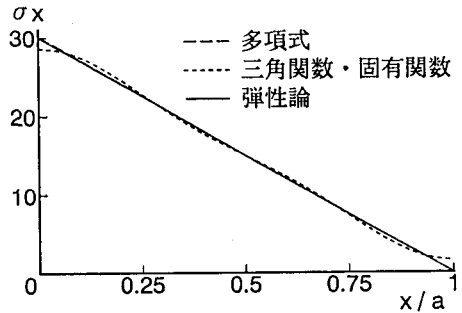


図-5 片持ち板の応力(3項)

(2) 曲げ応力解析

図-6に示す満載等分布荷重を受ける4辺固定支持板を解析する。板の形状は $a/b=2$ とし対称条件を考慮し1/4領域を3分割する。ポアソン比は0.3とする。変位(w)と応力(σ_x)を解析解と比較した結果を表-3に示す。多項式の級数を用いた場合、 w は3項用いると完全に解析解に一致するが、 σ_x は3%程度の誤差が生じる。それに比べ固有関数を用いた場合は σ_x がかなり振動している。

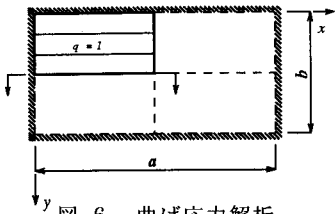


図-6 曲げ応力解析

5. 結 論

節点帯板法の変位関数を検討し、従来用いられていた三角関数と固有関数の代わりに多項式の級数を展開関数として用いた結果、解の収束性が増し、応力の振動する傾向がなくなった。さらに、種々の境界条件の平板を解析した結果、展開項数には3~5項用いれば十分であることがわかった。

また、固有関数は双曲線関数を含むため桁落ちが生じ易い。それに比べ多項式の級数は取り扱いが簡単で、数値計算上有利となる。

表-3 4辺固定支持板の変位と応力

	Xm	m	x/a				
			0	0.125	0.25	0.375	0.5
w	Poly.	0	-	0.491	0.745	1.003	1.128
		1	-	0.846	0.998	1.022	0.970
		3	-	1.001	1.000	1.000	1.000
		5	-	1.000	1.000	1.000	1.000
		0	-	0.491	0.745	1.003	1.128
	Eigen.	1	-	0.833	1.000	1.019	0.973
		3	-	0.998	0.998	1.001	0.999
		5	-	1.002	1.000	1.000	1.000
	Analytical. ($\times qa^4/D \times 10^{-4}$)		-	1.0	1.0	1.0	1.0
			(0)	(0.5683)	(1.198)	(1.503)	(1.583)
σ_x	Poly.	0	0.301	-0.979	0.392	1.207	1.970
		1	0.643	-0.157	1.128	1.316	0.328
		3	0.978	1.045	1.022	1.033	0.979
		5	1.000	1.027	1.024	1.035	1.041
		0	0.301	-0.979	0.392	1.207	1.970
	Eigen.	1	0.598	-0.295	1.172	1.267	0.499
		3	0.859	1.109	0.984	1.079	0.919
		5	0.931	1.158	1.041	1.014	0.997
	Analytical. ($\times qa^2/l^2 \times 10^{-3}$)		1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
			(-8.548)	(0.9782)	(2.675)	(2.532)	(2.371)

参 考 文 献

- 1) 林 正・坂口隆紀: Mindlin節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析, 土木学会論文集, NO.459, 1993
- 2) 笹戸松二・林 正・中嶋学夫・中島一朗: 節点帯板法による薄肉構造物の解析, JSSC第9回構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 1985
- 3) 林 正・藤井政美: 縮約変位関数による離散Kirchhoff帯板要素の一般的定式化, 土木学会論文集, NO.410, 1989
- 4) 林 正・渡辺 力・小島浩和: サブパラメトリック帯板要素による平面応力解析, 土木学会第43回年次学術講演会概要集, 1988