

## I-26

## 斜板の級数解について

大阪市立大学工学部

正員 小林 治俊

RADコンストラクション

正員 石川 一美

## 1. はじめに

斜板は、橋梁スラブに代表されるように工学的用途に多様に用いられている基本的な構造要素である。しかしながら、その基礎方程式は複雑であり解析的に解くことが難しいとされ、従来差分法を含む種々な近似解法により解が求められており、現在ではもっぱら有限要素法による解析が行われている。斜板は斜角の増大とともに鈍角部での特異性が顕著になるため、それらの数値解にバラツキのあることは良く知られており、このような数値解の精度の確認のための解析解としては、コーナー関数を用いた Morley [1,2] の解および級数解法による Iyengar ら[3]の解が多いようである。特に Morley は鈍角部での曲げモーメントの特異性を示しており、これを表現出来るかどうかは解法のよしあしを判断する一つの基準と言える。ところで斜板の級数解は、1949年 Lardy [4]が初めて単純支持板への適用を示したが、数値解は求めていない。その後級数解は興味の対象になったもののこれを用いた数値計算はほとんど行われず、有限要素に取って代わられたようである。級数解を広範に数値計算したものとしては前述の Iyengar らの研究がある。しかし、Iyengar らは斜角の変化に伴う板中央のたわみ、曲げモーメントを算出しているが、Morleyが示したコーナー部における曲げモーメントの特異性については何等言及していない。

斜板の級数解は無限連立方程式を解くことに帰着されるが、これは現在パソコンで十分可能である。級数解を正確に計算しその収束性や解の性質を確かめ、ベンチマーク・テストに耐え得る厳密解を求めておくことは現在においても意味あることと考えられる。本研究は固定ないしは単純支持菱形板を対象に級数解を用いて、既存の種々な解析解との精度の比較およびモーメントの特異性について検討するものである。

## 2. 級数解

斜角  $\phi$  の関数として  $c = \cos \phi$ ,  $s = \sin \phi$  と置き、直交座標系での諸式を斜交座標系で表す。たわみ  $w$  の基礎式は  $D$ ,  $\nu$ ,  $q$  を板の曲げ剛性、ポアソン比、荷重強度として次のように表される。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(1+2s^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4s \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = c^4 \frac{q}{D} \quad (1)$$

曲げモーメント、ねじりモーメントは、

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{D}{c^2} \left[ (c^2 + \nu s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\nu s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -\frac{D}{c^2} \left[ (\nu c^2 + s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_{xy} &= -\frac{D(1-\nu)}{c} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

以下、本文では斜交対称性  $w(a-x, b-y) = w(x, y)$  の場合を取

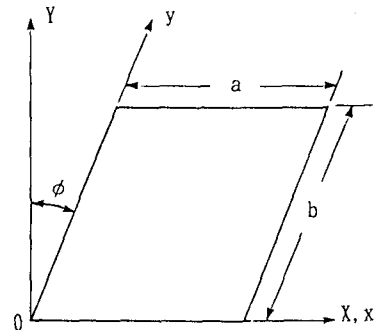


図1. 斜板の座標系

On Series Solution for Bending of Skew Plates

by Harutoshi KOBAYASHI and Kazumi ISHIKAWA

り扱うことにする。そこで、式(1)の特解  $w_p$  と荷重を次の級数で表す。

$$w_p(x, y) = \frac{c^4}{D} \sum_{m=\text{odd}}^{\infty} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} q_{mn} [\Lambda_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) + B_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y)] \quad (3)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=\text{odd}}^{\infty} \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y), \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (4)$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $\beta_n = n\pi/b$ , また  $q_{mn}$  は式(4. b)より求められる荷重展開係数である。

係数  $\Lambda_{mn}$ ,  $B_{mn}$  は式(3), (4)を式(1)へ代入して次のように決まる。

$$\Lambda_{mn} = \frac{-4s \alpha_m \beta_n (\alpha_m^2 + \beta_n^2)}{[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2]^2}, \quad B_{mn} = \frac{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2}{[(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 - 4s^2 \alpha_m^2 \beta_n^2]^2} \quad (5)$$

式(1)の同次解  $w_h$  も斜交対称性を有するものを採用することにし、 $x^* = x - (a/2)$ ,  $y^* = y - (b/2)$  とすれば

$$w_h(x, y) = \sum_{m=\text{odd}}^{\infty} \{ [A_m \cosh(\alpha_m y^*) + B_m y^* \sinh(\alpha_m y^*)] \cos[\alpha_m (s y^* + x^*)] \\ + [C_m \sinh(\alpha_m y^*) + D_m y^* \cosh(\alpha_m y^*)] \sin[\alpha_m (s y^* + x^*)] \} \\ + \sum_{n=\text{odd}}^{\infty} \{ [E_n \cosh(\beta_n x^*) + F_n x^* \sinh(\beta_n x^*)] \cos[\beta_n (s x^* + y^*)] \\ + [G_n \sinh(\beta_n x^*) + H_n x^* \cosh(\beta_n x^*)] \sin[\beta_n (s x^* + y^*)] \} \quad (6)$$

表1. 級数の収束状況 (板中央点)

| Skew<br>angle<br>$\phi$ | $m=n$ | Clamped rhombic plate |         |         | Simply supported rhombic plate |         |         |
|-------------------------|-------|-----------------------|---------|---------|--------------------------------|---------|---------|
|                         |       | $w^*$                 | $M_1^*$ | $M_2^*$ | $w^*$                          | $M_1^*$ | $M_2^*$ |
| 15°                     | 3     | 1.1230                | 2.2797  | 2.0216  | 3.6380                         | 4.7970  | 4.2604  |
|                         | 4     | 1.1229                | 2.2798  | 2.0215  | 3.6376                         | 4.7972  | 4.2599  |
|                         | 5     | —                     | —       | —       | 3.6374                         | —       | 4.2596  |
|                         | 10    | —                     | —       | —       | 3.6373                         | —       | 4.2594  |
|                         | 15    | —                     | —       | —       | —                              | —       | —       |
| 45°                     | 5     | 0.37700               | 1.4441  | 0.97561 | 1.3176                         | 3.2269  | 2.1907  |
|                         | 10    | 0.37687               | 1.4442  | 0.97514 | 1.3172                         | —       | 2.1899  |
|                         | 15    | 0.37686               | —       | 0.97511 | 1.3172                         | —       | 2.1898  |
|                         | 20    | —                     | —       | —       | 1.3172                         | —       | 2.1898  |
|                         | 25    | —                     | —       | —       | 1.3171                         | —       | 2.1898  |
|                         | 30    | —                     | —       | —       | —                              | —       | 2.1898  |
|                         | 35    | —                     | —       | —       | —                              | —       | 2.1898  |
|                         | 40    | —                     | —       | —       | —                              | —       | 2.1897  |
|                         | 45    | —                     | —       | —       | —                              | —       | —       |
| 75°                     | 5     | 0.0094436             | 0.24412 | 0.11071 | 0.039313                       | 0.63334 | 0.28307 |
|                         | 10    | 0.0093389             | 0.24322 | 0.10844 | 0.039291                       | 0.63277 | 0.28344 |
|                         | 15    | 0.0093249             | 0.24317 | 0.10807 | 0.039287                       | —       | 0.28338 |
|                         | 20    | 0.0093208             | 0.24315 | 0.10797 | 0.039285                       | —       | 0.28336 |
|                         | 25    | 0.0093191             | 0.24314 | 0.10793 | 0.039284                       | —       | 0.28335 |
|                         | 30    | 0.0093182             | 0.24314 | 0.10791 | —                              | —       | 0.28335 |
|                         | 35    | 0.0093177             | 0.24313 | 0.10790 | —                              | —       | 0.28335 |
|                         | 40    | 0.0093174             | —       | 0.10790 | —                              | —       | 0.28334 |
|                         | 45    | 0.0093173             | —       | 0.10789 | —                              | —       | —       |
|                         | 50    | 0.0093171             | —       | —       | —                              | —       | —       |

次に境界条件は、固定、単純支持条件に対して以下のように規定される。

$$\text{固定: } w = \partial w / \partial x - s \partial w / \partial y = 0, \quad \text{単純支持: } w = \Delta w = 0 \quad (x=0, a) \quad (7)$$

$$\text{固定: } w = \partial w / \partial y - s \partial w / \partial x = 0, \quad \text{単純支持: } w = \Delta w = 0 \quad (y=0, b) \quad (8)$$

たわみ  $w$  の一般解は  $w = w_p + w_h$  で与えられるので、式(3)、(6)をこれらの境界条件式に代入して整理すれば、未定係数  $A_m, B_m, \dots, G_n, H_n$  に関する無限連立方程式を得る。これを  $4(m+n)$  元の連立方程式として  $m, n$  を変化させ、級数の収束性を確かめながら解を確定する。なお数値計算に当たっては、式(3)で表される特解の二重級数は単級数に変換し[5]、収束解を用いることが肝要である。

### 3. 数値計算結果

ここでは等分荷重  $q_0$  を受ける菱形板( $a=b$ )について数値計算を行い、Iyengar ら[3]の級数解を含む他の解析解との比較を行う。なお、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とし、級数は  $m=n$  として計算した。また、たわみ、モーメントなどは特に断わらない限り、無次元量  $w^*, M_1^*, M_2^*, M^*$  を用いる。

$$w = 10^{-3} \times q_0 a^4 / D \cdot w^*, \quad (M_1, M_2, M) = 10^{-2} \times q_0 a^2 \cdot (M_1^*, M_2^*, M^*)$$

ただし、 $M_1, M_2$  は主モーメント、 $M = -D \Delta w$  は合モーメントである。

#### (1) 級数の収束性

斜角  $\phi$  が  $15^\circ, 45^\circ, 75^\circ$  の三ケースについて、板中央点での級数の収束状況を表1に示している。斜角

表2. 固定菱形板の解の比較

| Skew angle $\phi$ | Reference           | Values at center |         |         | Max. edge moment $M^*$ | Distance from obtuse corner |
|-------------------|---------------------|------------------|---------|---------|------------------------|-----------------------------|
|                   |                     | $w^*$            | $M_1^*$ | $M_2^*$ |                        |                             |
| $15^\circ$        | Present             | 1.1229           | 2.2798  | 2.0215  | -4.8516                | 0.402                       |
|                   | Iyengar et al. [3]  | 1.1231           | 2.279   | 2.021   | -4.838                 | —                           |
|                   | Iyengar et al. [6]  | 1.1230           | 2.292   | 2.033   | -4.7488                | 0.4                         |
|                   | Morley [2] method 1 | 1.123            | 2.280   | 2.021   | -4.85                  | 0.40                        |
|                   | Kale et al. [7]     | 1.1230           | —       | —       | —                      | —                           |
| $30^\circ$        | Present             | 0.76900          | 1.9786  | 1.5440  | -4.0541                | 0.305                       |
|                   | Iyengar et al. [3]  | 0.7694           | 1.978   | 1.544   | -4.108                 | —                           |
|                   | Iyengar et al. [6]  | 0.7687           | 1.972   | 1.544   | -4.0024                | 0.31                        |
|                   | Morley [2] method 1 | 0.769            | 1.979   | 1.544   | -4.06                  | 0.31                        |
|                   | method 2            | 0.770            | 1.979   | 1.542   | -4.07                  | 0.30                        |
|                   | Kale et al. [7]     | 0.7693           | —       | —       | —                      | —                           |
| $45^\circ$        | Present             | 0.37686          | 1.4442  | 0.97511 | -2.8858                | 0.215                       |
|                   | Iyengar et al. [3]  | 0.3769           | 1.444   | 0.9750  | -2.870                 | —                           |
|                   | Iyengar et al. [6]  | 0.3761           | 1.431   | 0.9723  | -2.9883                | 0.2                         |
|                   | Morley [2] method 1 | 0.377            | 1.444   | 0.976   | -2.98                  | 0.20                        |
|                   | method 2            | 0.377            | 1.444   | 0.976   | -2.90                  | 0.21                        |
|                   | Kale et al. [7]     | 0.3828           | —       | —       | —                      | —                           |
| $60^\circ$        | Present             | 0.10823          | 0.80292 | 0.45389 | -1.5859                | 0.133                       |
|                   | Iyengar et al. [3]  | 0.1081           | 0.8028  | 0.4548  | -1.628                 | —                           |
|                   | Iyengar et al. [6]  | 0.1073           | 0.7915  | 0.4498  | -1.783                 | —                           |
|                   | Kale et al. [7]     | 0.1219           | —       | —       | —                      | —                           |
| $75^\circ$        | Present             | 0.0093170        | 0.24313 | 0.10789 | -0.48282               | 0.0524                      |
|                   | Iyengar et al. [6]  | 0.00902          | —       | —       | —                      | —                           |
|                   | Kale et al. [7]     | 0.01169          | —       | —       | —                      | —                           |

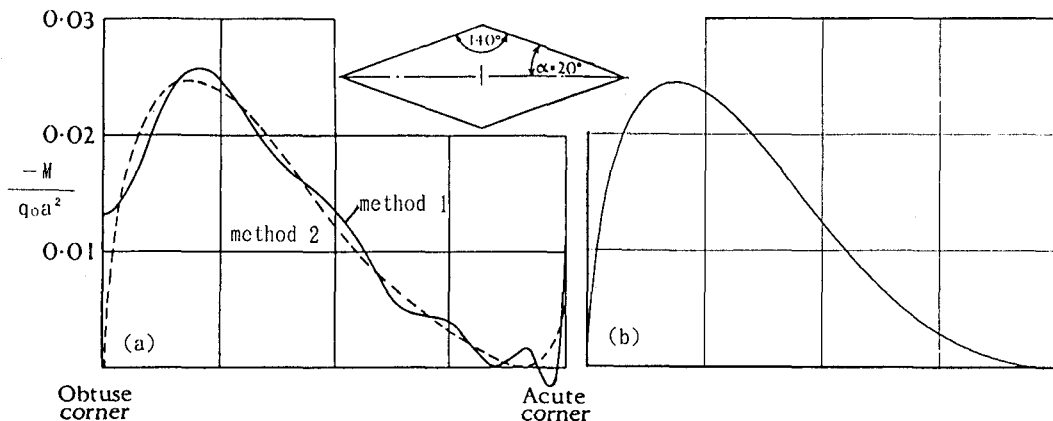


図2. 固定菱形板の固定边上の合モーメント分布：(a) Morley の解，(b) 本級数解

が増大すれば収束は遅くなり、 $\phi = 15^\circ, 45^\circ$ では固定板の場合が単純支持板の場合よりわずかに収束が遅いようである。しかし有効数字3桁程度を得るには、 $m=n=5 \sim 10$  で収束値が得られるものと判断してよい。

## (2) 固定菱形板について

表2に他の解析解との比較を示している。これらのうち、Iyengar ら[3]の結果は、本解と同じ級数解で  $m=n=6$  とした値である。本解とわずかに違っているが、これは特解を二重級数のまま計算した結果によるものであろう。またIyengar らは文献6で、梁の固有関数（振動モード関数）を用いて周辺条件を満足させ、基礎式(1)の同次式の固有関数と梁の固有関数との組合せによる解であるが、斜角の増大と共に精度が悪くなっている。以上は板中央点での比較である、次に固定边上の合モーメント分布を検討する。図2は、 $\phi = 50^\circ$ の場合についてMorleyの結果と本結果を示している。Morleyはmethod 1に比べてmethod 2の方が精度が良いとしているが、どちらの結果にもコーナー部での乱れが見られる。これを除けば、本解とmethod 2

表3. 単純支持菱形板の解の比較

| Skew angle $\phi$ | Reference          | Values at center |         |         |
|-------------------|--------------------|------------------|---------|---------|
|                   |                    | $w^*$            | $M_1^*$ | $M_2^*$ |
| $10^\circ$        | Present            | 3.8691           | 4.8561  | 4.4879  |
|                   | Iyengar et al. [3] | 3.875            | 4.858   | 4.495   |
|                   | Morley [1]         | 3.87             | 4.86    | 4.48    |
|                   | Sampath et al. [8] | 3.877            | 4.858   | 4.497   |
|                   | Rajaiah et al. [9] | 3.869            | 4.856   | 4.488   |
| $30^\circ$        | Present            | 2.5601           | 4.2534  | 3.3291  |
|                   | Iyengar et al. [3] | 2.596            | 4.283   | 3.383   |
|                   | Morley [1]         | 2.56             | 4.25    | 3.33    |
|                   | Sampath et al. [8] | 2.563            | 4.284   | 3.342   |
|                   | Rajaiah et al. [9] | 2.560            | 4.253   | 3.329   |
| $45^\circ$        | Present            | 1.3171           | 3.2269  | 2.1897  |
|                   | Iyengar et al. [3] | 1.361            | 3.288   | 2.282   |
|                   | Sampath et al. [8] | 1.327            | 3.230   | 2.210   |
|                   | Rajaiah et al. [9] | 1.317            | 3.226   | 2.190   |
| $60^\circ$        | Present            | 0.40785          | 1.9062  | 1.0857  |
|                   | Morley [1]         | 0.408            | 1.91    | 1.08    |
|                   | Sampath et al. [8] | 0.4114           | 1.908   | 1.099   |
|                   | Rajaiah et al. [9] | 0.4077           | 1.905   | 1.086   |
| $75^\circ$        | Present            | 0.039284         | 0.63277 | 0.28334 |

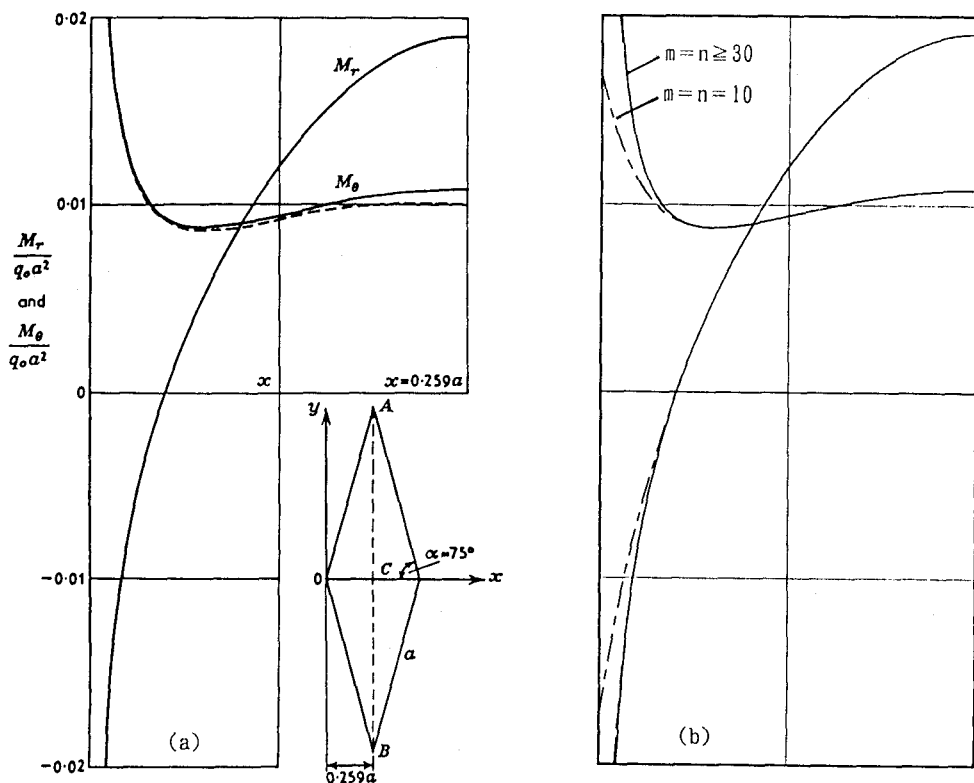


図3. 単純支持菱形板のモーメント分布（OC上）：(a) Morley の解，(b) 本級数解

の結果はよく一致している。岡村ら[10]，Warren ら[11]も別解法で合モーメント分布を示しているが，コーナー部を含めて本解と同様な結果を得ている。なおここには示していないが， $\phi = 30^\circ$  に対する Morley の結果と本解とは鋭角部で違いがある。

## (2) 単純支持菱形板について

解の比較を表3に示している。Iyengar らの結果も級数解であるが，本解との違いは固定板の場合と同様に二重級数を使った差であろう。Morley の数値はコーナー関数を用いた結果であり，本解とよく一致している。また Sampath もコーナー関数を用いているが，Morley の結果とはとわずかに違いが認められる。Rajaiah らは写像を用いた数値を示しているが，本解と最も良く一致した結果を示している。さて，単純支持板は，鈍角部にモーメントの特異性が生じることが Williams [12] により指摘されている。Morley によれば， $\phi = 60^\circ$  の場合， $q_0 a^2 (1-\nu)(k+1)ka_1(r/a)^{k-1}$  の特異性を持つ。ただし， $k=0.2$ ， $a_1=3.596 \times 10^{-3}$ 。図3は菱形板の短軸上のモーメント分布である。本級数解は項数の増加と共にその特異性を良く表しており， $m(=n) \geq 30$ では Morley の結果とほとんど一致する。O点での値がどの程度であるか，本級数解による値を表4に示したが，本来この値は無限大となるべきで，本級数解では有限値に留まっている。しかしながら，項数の増加とともに値が増大しており，本解は鈍角

表4. 級数の項数の違いによるコーナー・モーメント

| $m=n$ | $M_\theta/q_0 a^2$ | $M_r/q_0 a^2$ |
|-------|--------------------|---------------|
| 10    | 0.0170             | -0.0174       |
| 20    | 0.0299             | -0.0300       |
| 30    | 0.0414             | -0.0415       |
| 40    | 0.0521             | -0.0522       |
| 50    | 0.0624             | -0.0624       |
| 60    | 0.0722             | -0.0722       |
| 70    | 0.0816             | -0.0817       |
| 80    | 0.0909             | -0.0909       |
| 90    | 0.0998             | -0.0999       |
| 100   | 0.1086             | -0.1086       |

部のごく近傍を除いては正しいモーメント分布を示していると推察される。また、 $M_\theta$ ,  $M_r$  の値が項数の増大と共に一致していることは、本数値解の正確さを示すものでもある。Morley の解は、0点での特異性を有しているので、本解とは逆に鈍角部から遠去かるにつれて、級数の項数を必要とすることも理解される。

#### 4. おわりに

これまでほとんどなされなかった斜板の級数解を検討する目的で、固定および単純支持菱形板に等分布荷重が作用する場合を、既存の級数解を含む解析解との精度の比較を行い、本級数解の正確さを示した。また Morley がコーナ関数を用いて示した鈍角部でのモーメントの集中性についても本級数解で表され得ることが分かった。

#### 参考文献

1. Morley, L. S. D. (1962) Bending of Simply Supported Rhombic Plate under Uniform Normal Loading, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 15, pp. 413-426.
2. Morley, L. S. D. (1964) Bending of Clamped Rectilinear Plates, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. 17, pp. 293-317.
3. Iyengar, K. T. Sundra Raja, Srinivasan, R. S. and Sundara Rajan, C. (1971) Some Studies on Skew Plates, The Aeronautical Journal, Vol. 75, pp. 130-132.
4. Lardy, P. (1949) Die strenge Lösung des Problems der schiefwinkliger Platte, Schweizerische Bauzeitung, Vol. 67, No. 15, pp. 207-209.
5. Krettnner, J. (1954) Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten, Ingenieur-Archiv, Vol. 22, pp. 47-54.
6. Iyengar, K. T. Sundra Raja and Srinivasan, R. S. (1967) Clamped Skew Plate under Uniform Normal Loading, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 71, pp. 139-140.
7. Kale, C. S., Gopalacharyulu, S. and Ramachandra Rao, B.S. (1972) Analysis of a Clamped Skew Plate under Uniform Loading, AIAA Journal, Vol. 10, pp. 695-697.
8. Sampath, S. G. and Rao, A. K. (1966) Some Problems in the Flexure of Thin Rectilinear Plates, Indian Institute of Science, Bangalore, Department of Aeronautical Engineering, Report 112S.
9. Rajaiah, K. and Rao, A. K. (1974) Exact Analysis of Simply Supported Rhombic Plates under Uniform Pressure, Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Vol. 76, pp. 381-388.
10. 岡村宏一, 石川一美, 古市享 (1993) 曲げ, あるいは面内力を受ける大型の任意4辺形平板要素の剛性方程式, 土木学会論文集, No. 465/I-23, pp. 67-76.
11. Warren, W. E. (1964) Bending of Rhombic Plates, AIAA Journal, Vol. 2, pp. 166-168.
12. Williams, M. L. (1952) Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending, Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 325-329.