

I-23

軸対称多層球殻の弾性衝撃応答

大阪市立大学工学部 正 員 小林 治俊
 大阪市立大学大学院 学生員 松村 弘
 大阪市立大学大学院 学生員 石丸 和宏
 大阪市立大学工学部 正 員 園田恵一郎

1. はじめに

圧力容器に代表されるように、球殻は工学的用途に種々用いられており、実用上および力学的観点からその衝撃挙動を明らかにしておくことは重要であろう。球殻の衝撃応答解析には、薄肉シェル理論を用いた解析と動弾性論に基づく厳密解析の二つの流れがあるが、衝撃問題では応力波伝播現象を正確に表すことが出来る動弾性論を用いることが好ましい。これまで動弾性論を用いた単層の球殻の衝撃応答解析は種々方法を用いて行われている。すなわち、ラプラス変換法[1, 2]、固有関数展開法(モード法)[3, 4]、一般化波線理論(Generalized Ray Theory)[5]であり、解形式が違うがいずれも厳密解法である。このうち、文献3, 4の固有関数展開法による解析は自由振動モードより成る級数解を与えているが数値計算は行っていない。なお、差分表示に基づく特性曲線法[6]は精度の点ですぐれた方法であるが一般的でない。以上のように単層球殻に関する研究はいくつかあるが、多層球殻を動弾性論に基づき解析した研究は、著者らの知る限りほとんどないようである。

本研究は、軸対称多層球殻が衝撃荷重を受ける際の動的挙動を明らかにすることを目的とし、動弾性論に基づく解析を行ったものである。解析手法には固有関数展開法を用いる。固有関数展開法によれば、対象とする問題の固有関数を求めることができれば、構造物の動的応答解析で一般に用いられているモード解析に則る解析過程により解を求めることができる利点があり、著者らも多層の平面梁、円板そして円筒の弾性衝撃解析においてその有用性を示した[7-9]。

2. 基礎方程式

本文で取り扱う軸対称3層球殻の座標系を図1に示している。変位で表した軸対称球殻の運動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

と表される。ここに、 u は r 方向の変位、また c_1 は縦波の速度であり、ラメの定数(λ, μ)と物体の密度(ρ)により $c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}$ である。

応力-変位関係式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r} \\ \sigma_\theta &= \sigma_\phi = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi r} = \tau_{r\theta} = 0$$

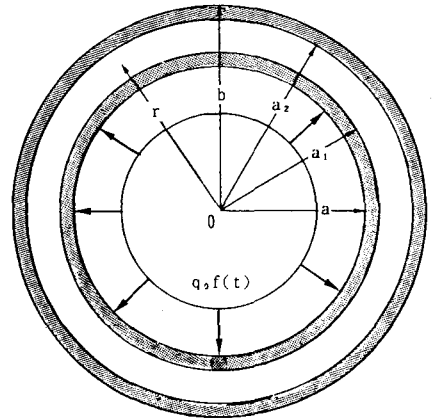


図1 内圧を受ける軸対称3層球殻の座標系

Impact Response Analysis of Spherically Symmetric Layered Spheres

by Harutoshi KOBAYASHI, Hiroshi MATSUMURA, Kazuhiro ISHIMARU and Keiichiro SONODA

添字 r, θ, ϕ は各々半径, 周 (経線), 母線 (緯線) 方向の座標を意味する. 以上は球殻の各層において成立するので, 以後関連する諸量に添字 i ($i=1, 2, 3$) を付して i 層における諸量を表す.

境界条件および接合面の連続条件は, 式(3) で与えられ, q_0 は荷重強度, また $f(t)$ は衝撃荷重の時間関数である. 衝撃を受ける前の球殻は静止しているものとすれば, 初期条件は式(4)のようになる. ドット ($\dot{}$) は時間に関する微分を意味する.

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= -q_0 f(t) (r=a) \\ u_1 &= u_2, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2} (r=a_1) \\ u_2 &= u_3, \quad \sigma_{r2} = \sigma_{r3} (r=a_2) \\ \sigma_{r3} &= 0 (r=b) \\ u_i(r, 0) &= \dot{u}_i(r, 0) = 0\end{aligned}\quad (3)$$

$$u_i(r, 0) = \dot{u}_i(r, 0) = 0 \quad (4)$$

3. 自由振動解析

本衝撃解析は, 前述のように固有関数展開法を用いる. よって, まず自由振動解析により固有関数 (モード関数) を誘導する.

いま, 式(5) のように固有円振動数 ω の調和振動を仮定し (j は虚数単位), 式(1)へ代入すれば式(6)を得る. ただし, $k = \omega/c_1$ である. 式(6)は, 球ベッセル関数の微分方程式であるから, その解は式(7) で与えられる. 式中, $j_n(\cdot)$, $y_n(\cdot)$ はそれぞれ n 次の第1種および第2種球ベッセル関数, A_i , B_i は境界条件より定まる積分定数である. 式(5), (7)を式(2)へ代入して応力式を求めれば,

$$u_i(r) = U_i(r) \exp(j\omega t) \quad (5)$$

$$\frac{d^2 U_i}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU_i}{dr} + \left(k^2 - \frac{2}{r^2} \right) U_i = 0 \quad (6)$$

$$U_i(r) = A_i j_1(kr) + B_i y_1(kr) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r1} &= \sigma_{r1}^* \exp(j\omega t), \quad \sigma_{r1}^* = \lambda k \left\{ A_1 \left[\alpha_1 j_0(kr) - 2\beta_1 \frac{j_1(kr)}{kr} \right] + B_1 \left[\alpha_1 y_0(kr) - 2\beta_1 \frac{y_1(kr)}{kr} \right] \right\} \\ \sigma_{\theta 1} &= \sigma_{\theta 1}^* \exp(j\omega t), \quad \sigma_{\theta 1}^* = \lambda k \left\{ A_1 \left[j_0(kr) + \beta_1 \frac{j_1(kr)}{kr} \right] + B_1 \left[y_0(kr) + \beta_1 \frac{y_1(kr)}{kr} \right] \right\}\end{aligned}\quad (8)$$

ここに, $\alpha_i = (1 - \nu_i)/\nu_i$, $\beta_i = (1 - 2\nu_i)/\nu_i$ で, ν_i は i 層のポアソン比である.

次に, 球殻の内外面の自由境界条件および接合面での連続条件は次式のようになる.

$$\sigma_{r1} = 0 (r=a), \quad u_1 = u_2, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2} (r=a_1), \quad u_2 = u_3, \quad \sigma_{r2} = \sigma_{r3} (r=a_2), \quad \sigma_{r3} = 0 (r=b) \quad (9)$$

これらの条件式に式(5), (7), (8)を代入すれば, 積分定数 $\mathbf{A} = (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)^T$ に関する6元連立同次方程式 $\mathbf{CA} = 0$ を得る. $\mathbf{C}$ は 6×6 の係数行列である. 振動数方程式, $|\mathbf{C}| = 0$, Regula-Falsi法により数値的に解いて m 次の固有円振動数 ω_m ($m=1, 2, 3, \dots$) を求め, 対応する積分定数 A_{im} , B_{im} を定めれば変位, 応力の固有関数 $U_{im}(r)$, $\sigma_{rim}^*(r)$, $\sigma_{\theta im}^*(r)$ が確定する.

4. 衝撃応答解析

衝撃問題に対する式(1)の解は, 静的荷重 q_0 による解 (静的解) を $u^s_i(r)$, 慣性力を考慮した解 (擾乱解) を $u^D_i(r, t)$ とすれば, 式(10)で与えることができる. また, $u^s_i(r)$ は式(1)より慣性項を省いた静的釣り合い式(11)を満足し, その解を, 式(12)のように得る. 積分定数 C_i , D_i は式(3)で $f(t)=1$ といった境界条件および接合面の連続条件より決定できるが, ここではこれを省略する.

$$u_i(r, t) = f(t)u^s_i(r) + u^D_i(r, t) \quad (10)$$

$$\frac{d^2 u^s_i}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du^s_i}{dr} - \frac{2u^s_i}{r^2} = 0 \quad (11)$$

$$u^s_i(r) = C_i r + D_i r^{-2} \quad (12)$$

$$u^D_i(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) U_{mi}(r) \quad (13)$$

$$\ddot{Q}_m(t) + \omega_m^2 Q_m(t) = Z_m \ddot{f}(t) \quad (14)$$

次に, 擾乱解 $u^D_i(r, t)$ を式(13)のように $Q_m(t)$ を未定の時間関数とし前節で求めた固有関数 $U_{im}(r)$ よりなる級数に表し, これと式(10)を式(1)に代入し, 式(6),

(11)を考慮して式を変形したのち固有関数の直交条件を利用すれば、 $Q_m(t)$ に関する微分方程式(式(14))を得る。係数 Z_m は、次式で与えられる。

$$Z_m = - \left[\sum_{i=1}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \rho_i u_i^s(r) U_{im}(r) dv \right] \left[\sum_{i=1}^3 \int_{r_i}^{r_{i+1}} \rho_i U_{im}^2(r) dv \right]^{-1} \quad (15)$$

ここに、 $dv = 4\pi r^2 dr$, $r_1 = a$, $r_2 = a_1$, $r_3 = a_2$, $r_4 = b$. 式(14)の解は次のように与えられる。

$$Q_m(t) = Q_m(0) \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \dot{Q}_m(0) \sin \omega_m t + \frac{Z_m}{\omega_m} \int_0^t \ddot{f}(\tau) \sin[\omega_m(t - \tau)] d\tau \quad (16)$$

$Q_m(0)$, $\dot{Q}_m(0)$ を決定するため、まず式(10)を式(4)の初期条件に代入すると、 $u_i^D(r, 0) = -f(0)u_i^s(r)$,

$\dot{u}_i^D(r, 0) = -\dot{f}(0)u_i^s(r)$ が得られる。この式の左辺に式(13)を代入したのち両辺に $U_{im}(r)$ を掛け積分し、

固有関数の直交性を利用すれば、 $Q_m(0) = Z_m f(0)$, $\dot{Q}_m(0) = Z_m \dot{f}(0)$ と求められる。

5. 数値計算結果

ここでは図2に示している時間に関してステップ状の衝撃荷重、矩形パルス状の衝撃荷重が内面に作用する単層球殻および3層球殻に対して応答計算を行った。単層球殻はコンクリートよりなり、3層球殻は内外層が鋼、中間層がコンクリートよりなるものとする。鋼、コンクリートの材料定数には密度： $\rho_s = 7.85 \text{ tf/m}^3$, $\rho_c = 2.3 \text{ tf/m}$, ヤング率： $E_s = 2.1 \times 10^7 \text{ tf/m}^2$, $E_c = 2.4 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$, ポアソン比： $\nu_s = 0.3$, $\nu_c = 0.167$ を使用した。また単層、3層球殻共に内外径比 $a/b = 0.5$ を取り扱い3層の場合の鋼厚は全殻厚の1/10とした。数値計算において級数解の項数は収束状況を検討した結果、単層球殻では $m = 300$, 3層球殻では $m = 600$ とし、すべての計算を倍精度で行った。なお、時間は無次元時間 $\tau = (c_s t/b)$ を用いている。すなわちコンクリート内部を進行する縦波が球殻の外径 b を進むのに要する時間を1とする。

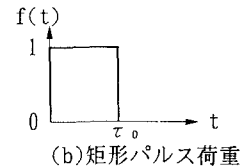
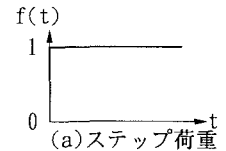


図2 荷重の時間関数

前述したように単層の球殻は Paoら[5]により一般化波線理論を用いて厳密に解析されているので、Paoらの結果と本解析結果を最初に比較検討する。Paoらはステップ荷重と $\tau_0 = 0.5$ の矩形パルス荷重の場合を対象としているが、ここでは更に $\tau_0 = 1.0$ の場合も計算を行う。まず、 $r = 0.75b$ における応力 σ_r に対する結果を図3(a)に示す。応答曲線は時間刻みを $\Delta\tau = 0.01$ として描いている。ステップ荷重と $\tau_0 = 0.5$ の矩形パルス荷重に対する結果は双方が完全に一致した。図において応答曲線が不連続的に変動している箇所は応力波の波面が到達したことを示しており、応答は縦波に依存している。ステップ荷重と比較して $\tau_0 = 0.5$ の矩形パルス荷重の場合が、引張・圧縮ともに大きな値を示している。これはステップ荷重では常に圧縮波が作用しているのに対し、 $\tau_0 = 0.5$ の矩形パルス荷重では内面で発生した最初の応力波が $\tau = 0.5$ で外面で反射し、圧縮波から引張波に変わりその応力波が着目点に到達する時刻と $\tau = 0.5$ での除荷によって発生する引張波の到達する時刻が同時刻であるために引張応力の値が増幅し、さらにこの応力波が内面で圧縮波として反射するために大きな圧縮応力を出すからである。一方 $\tau_0 = 1.0$ の応答曲線は、引張・圧縮応力ともに値としては小さく、比較的スムーズな応答曲線を示している。これは $\tau_0 = 0.5$ の場合と同様に内面→外面→内面と伝播した応力波が内面で反射し圧縮波に変わる時刻($\tau = 1$)に除荷しているため、その圧縮波を除荷による引張波が相殺するためである。

図3(b)は3層球殻の σ_r の応答曲線であり、(1)はステップ荷重、(2)および(3)はそれぞれ $\tau_0 = 0.456$, $\tau_0 = 0.911$ の矩形パルス荷重の場合の応答を示している。 $\tau_0 = 0.456$ は3層球殻内面で発生した縦波が球殻外面に到達するのに要する時間で、単層球殻の場合の $\tau_0 = 0.5$ に相当する。また $\tau_0 = 0.911$ は球殻内

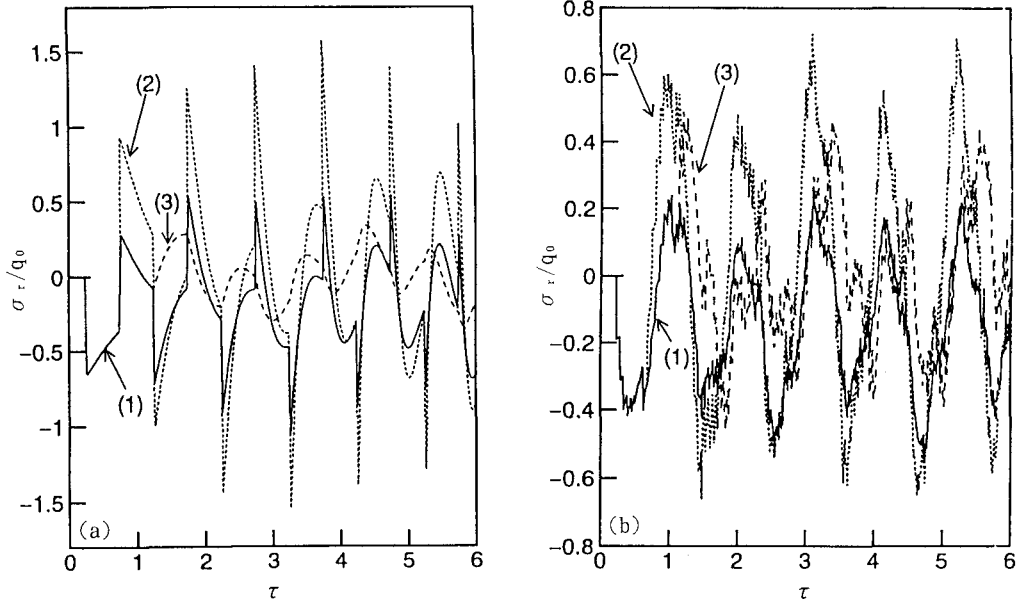


図3 σ_τ の応答曲線($r/b=0.75$): (a)単層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.5$, $\tau_0=1.0$], (b)3層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.456$, $\tau_0=0.911$]

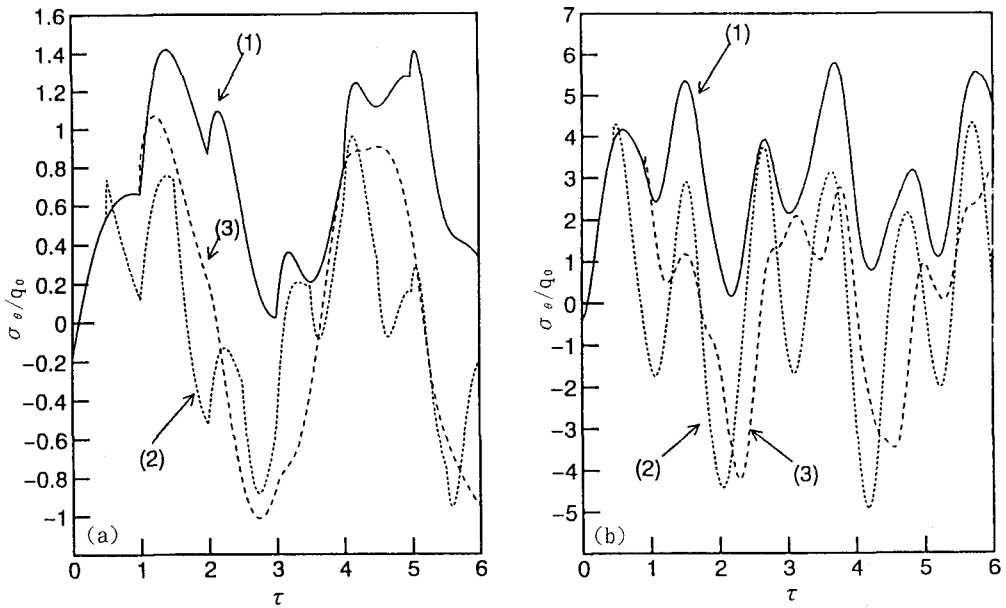


図4 σ_e の応答曲線($r/b=0.5$): (a)単層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.5$, $\tau_0=1.0$], (b)3層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.456$, $\tau_0=0.911$]

面で発生した縦波が外面で反射し内面に返ってくるまでに要する時間で、単層球殻の場合の $\tau_0=1.0$ に相当する。3層球殻の場合、応力波は球殻の内外面で反射する他、接合面で反射・透過を繰り返すために、図3(a)の単層球殻の場合と比較して複雑な応答性状を示す。ステップ荷重の最初の応答に着目すると荷重載荷面で発生した縦波が剛性の高い鋼から剛性の低いコンクリートに入射する際に応答値が低減されることが

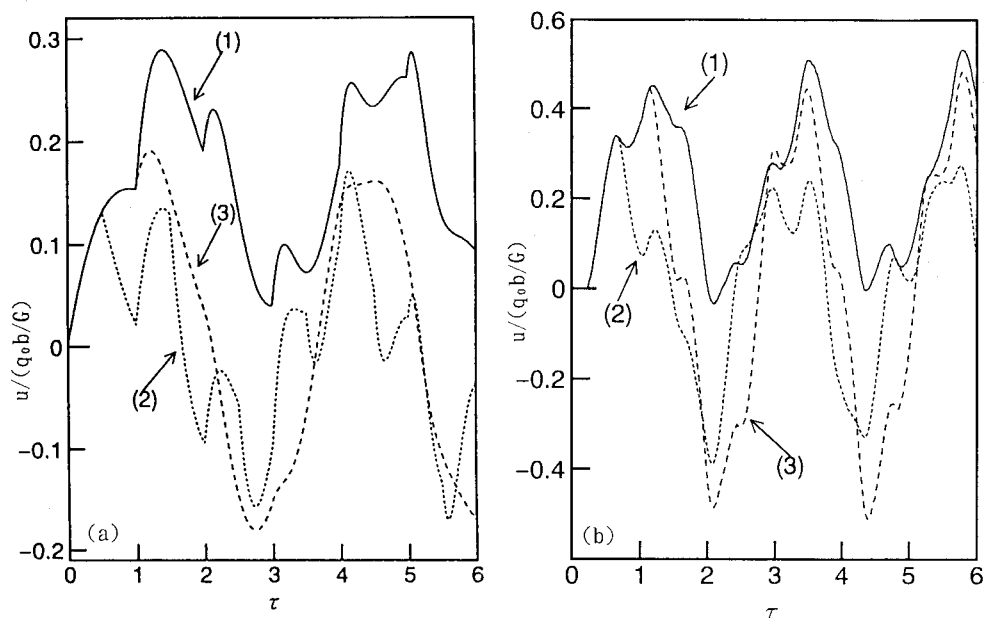


図5 変位 u の応答曲線($r/b=0.5$): (a)単層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.5$, $\tau_0=1.0$], (b)3層球殻[(1)ステップ荷重; (2), (3)パルス荷重 $\tau_0=0.456$, $\tau_0=0.911$]

分かる。この図では単層球殻の場合と同じように $\tau_0=0.456$ の矩形パルス荷重による応答が他の荷重による応答と比較して、引張・圧縮ともに大きな値を示している。 $\tau_0=0.911$ の矩形パルス荷重による応答は単層球殻の場合と異なり、ステップ荷重と比べて引張・圧縮ともに大きな値を示しているが、これは応力波の接合面での反射、透過の影響によるものと思われる。

図4(a), は単層球殻の内面における応力 σ_r の応答曲線である。先に述べた単層球殻の σ_r の応答では $\tau_0=0.5$ の矩形パルス荷重の場合が、引張・圧縮応力ともにステップ荷重が作用した場合と比べて大きな値を示したが、この図より分かるように σ_r の応答では引張応力にはステップ荷重が作用した場合の方が他の2つの矩形パルス荷重が作用した場合と比べて大きく、ステップ荷重の場合はほとんど引張応力となっている。この理由として σ_r の応答は応力波による影響の他に曲げ変形挙動による影響が考えられる。図5(a)に対応する内面での変位 u の応答曲線を示しているが、双方の応答の類似性が図より分かる。なお、 $\tau_0=1.0$ の矩形パルス荷重の場合の応答曲線で、 $\tau > 1.25$ の範囲では、応力波が到達したことを示している不連続な箇所は他の荷重が作用している場合と比較してあまり見られないが、これは先の σ_r の応答で述べたように境界面で反射した応力波と除荷によって発生した応力波が干渉して相殺しているためである。内面での σ_r は衝撃瞬時に値をもつが、これは作用した圧縮荷重 q_0 と釣り合う圧縮応力 $\sigma_r = -q_0$ による θ 方向のひずみが拘束されるために、応力 σ_r が生じるからである。

図4(b)は3層球殻の内面における σ_r の応答曲線である。単層球殻の場合(図4(a))と同様に、3層球殻の場合も引張応力についてはステップ荷重が作用した場合が最大となっている。また衝撃瞬時に内面で応力値が存在するのは、単層球殻の場合と同じ理由である。この値は単層球殻では $0.20q_0$ であるのに対し、3層球殻では単層球殻と比べて剛性が高いために $0.43q_0$ になっている。変位応答を図5(b)に示している。

図6(a)単層球殻の外面での σ_r の応答曲線であり、図6(b)は3層球殻のそれである。ここで用いた荷重の時間関数は、図4の内面での応答曲線の場合と同じである。単層球殻、3層球殻ともに外面での σ_r の引張応力の値は内面でのそれよりも小さい。 σ_r の応答曲線は、ステップ荷重では静的解を中心に振動してい

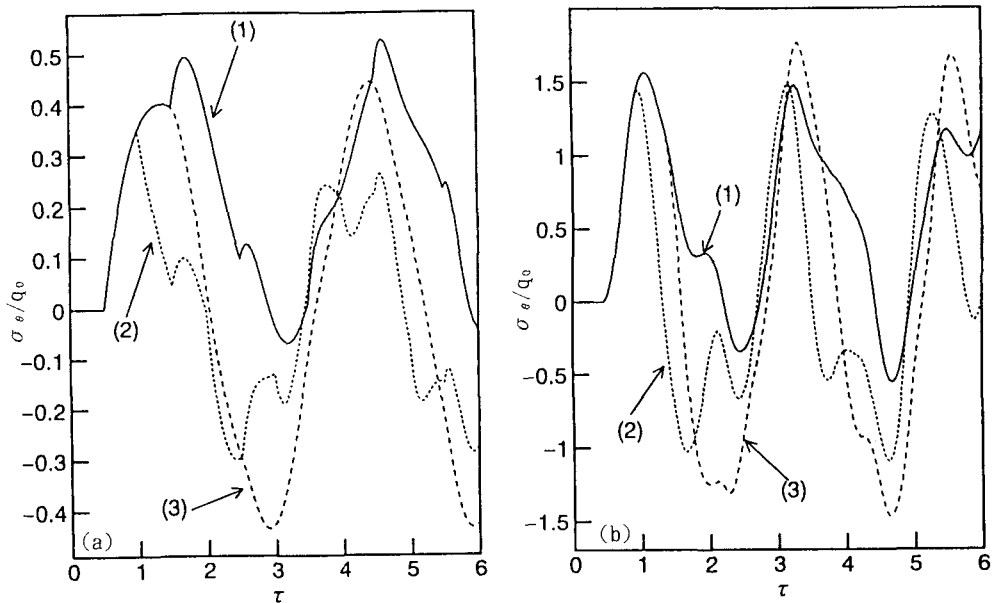


図6 σ_θ の応答曲線($r/b=1.0$): (a)単層球殻[(1)ステップ荷重;(2),(3)パルス荷重 $\tau_0=0.5$, $\tau_0=1.0$],
(b)3層球殻[(1)ステップ荷重;(2),(3)パルス荷重 $\tau_0=0.456$, $\tau_0=0.911$]

るが、矩形パルス荷重では荷重を除荷した後は自由振動状態に入るので0を中心に振動している。したがって、圧縮応力はステップ荷重よりも矩形パルス荷重による方が大きい。

6. おわりに

衝撃荷重を受ける軸対称多層球殻を動弾性論に基づく固有関数展開法により解析する方法を示し、コンクリートよりなる単層球殻および内外層が鋼、中間層がコンクリートよりなる3層球殻を対象に時間に関してステップ状の衝撃荷重、矩形パルス状の衝撃荷重が球殻内面に作用する場合の数値計算を行い、応力波の伝播特性を示した。その結果、 σ_r の応答は矩形パルス荷重が作用した場合、载荷継続時間 τ_0 によってはステップ荷重が作用した場合よりも大きくなることがある。 σ_θ の場合引張応力の値は単層球殻では载荷時間が長くなると大きくなるが、3層球殻では必ずしもそうでないことが判った。

参考文献

- 1) 鈴木真一：日本機械学会論文集（第1部），32巻，236号，pp. 551-554，1966.
- 2) Bickford, W. B. and Warren, W. E.: Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 3, Pergamon Press, pp. 433-445, 1967.
- 3) Cinelli, G.: J. Applied Mechanics, Vol. 33, No. 4, pp. 825-830, 1966.
- 4) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: Elastodynamics, Vol. 2, Academic Press, New York, 1975.
- 5) Pao, Y.-H. and Ceranoglu, A. N.: J. Applied Mechanics, Vol. 45, No. 1, pp. 114-122, 1978.
- 6) Chou, P. C. and Koenig, H. A.: J. Applied Mechanics, Vol. 33, No. 1, pp. 159-167, 1966.
- 7) 小林治俊，園田恵一郎，鹿島光洋：構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1489-1496, 1992.
- 8) 小林治俊，園田恵一郎，石丸和宏：構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1497-1504, 1992.
- 9) 小林治俊，松村 弘，石丸和宏，園田恵一郎：構造工学論文集，Vol. 39A, pp. 1485-1492, 1993.