

I-16

不完全合成板の曲げ振動解析について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一
 北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎
 北海道大学工学部 正員 小 幡 卓 司
 北海道大学工学部 正員 平 沢 秀 之

1. はじめに

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であるが、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。合成桁において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析するので、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用いることができるものと考え。従って、接着が完全に剛であるならば、完全合成二層板と考えることができる。ここでは接着は完全に剛でなく接着剤の変形を考慮した合成二層板を考える（以下、不完全合成二層板という¹⁾）。このような不完全合成二層板の静的解析と全体座屈解析とが合成板の合成度を用いて系統的に解析できることを示している²⁾。一方、このような不完全合成二層板の振動問題についての研究報告はあまりないようである。そこで、本論文は振動問題について考察し、理論式を誘導し、固有周期を求め、更に、四辺単純支持板の場合に、定量的に固有周期を求めることができるように、無次元量として α , β , γ なるパラメータを用いたのでそれを説明し、数値解析により不完全合成二層板の固有周期特性を示す。無次元量の $\alpha = 1$ の場合が完全合成二層板であり、 $0 < \alpha < 1$ の場合が不完全合成二層板であり、 $\alpha = 0$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。また、これらの無次元量 α , β , γ なるパラメータが前述の静的解析と全体座屈解析の場合と同一のパラメータであることを示す。さらに、不完全合成二層板の静的解析、全体座屈解析、振動解析が系統的にできることを示すものである。数値解析にはパソコンを用いるまでもなく、電卓で十分である。また、新しい型のジベルを用いた合成床版の合成度の評価³⁾に文献⁴⁾を適用している。この文献⁴⁾を更に利用しやすい代数式で表示したものが、本論文の合成度に関する実用的評価式であるので、適用性は広いものと思われる。

2. 不完全合成二層板の曲げ振動の偏微分方程式

図-1、2 は本解析で用いる第一板と第二板とが接着剤で合成された長方形板(合成二層板)を示している^{5), 6), 7)}。不完全合成二層板の曲げ振動に関する運動方程式をD'Alembertの原理を用いて導く。

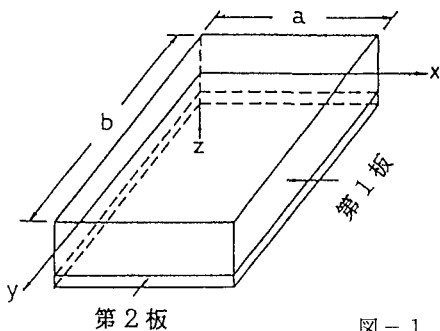


図-1

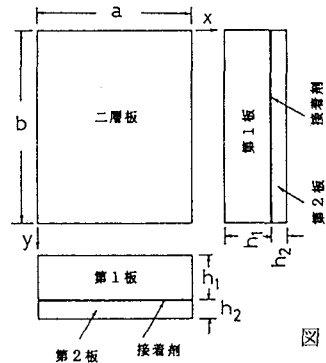


図-2

On Flexural Vibration Analysis of Partial Composite Plates

by Koichi SATO, Toshiro HAYASHIKAWA, Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA

w を単位長さあたりの不完全合成二層板の重量、 g を重力加速度とすれば、次のような偏微分方程式になる。

$$\nabla^4 w_v(x, y, t) = - \frac{w}{D_v \cdot g} \frac{\partial^2 w_v(x, y, t)}{\partial t^2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\nabla^4 w_e(x, y, t) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y, t) = - \frac{w}{D_e \cdot g} \frac{\partial^2 w_e(x, y, t)}{\partial t^2} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、接着剤のばね定数 K は Newmark⁸⁾ による押し抜きせん断試験により求めるものとし

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1} \dots\dots\dots(3)$$

とおいた。

ただし、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$, $D_e = D_v \cdot (\bar{n} I_2 + I_1) / A_1 s_1 s$, $\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2)$,
 $\bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2)$, $\bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1$, $I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s$
 $= I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2 \dots\dots\dots(4)$

式(1), 式(2)を与えられた境界条件、初期条件のもとで解けば、等方性不完全二層板の自由振動を解析することが出来る。解の形を次のようにおく⁹⁾。

$$w_v(x, y, t) = W_v(x, y) \cdot \theta_v(t) \dots\dots(5), \quad w_e(x, y, t) = W_e(x, y) \cdot \theta_e(t) \dots\dots(6)$$

ここで $W_v(x, y) = X_v(x) \cdot Y_v(y) \dots\dots(7)$, $W_e(x, y) = X_e(x) \cdot Y_e(y) \dots\dots(8)$

$$\theta_v(t) = \sin \omega_v t \dots\dots\dots(9), \quad \theta_e(t) = \sin \omega_e t \dots\dots\dots(10)$$

式(5)を式(1)に代入すれば、

$$X_v''''(x) \cdot Y_v(y) \cdot \theta_v(t) + 2 X_v''(x) \cdot Y_v''(y) \cdot \theta_v(t) + X_v(x) \cdot Y_v''''(y) \cdot \theta_v(t) \\ + w / (g \cdot D_v) \cdot X_v(x) \cdot Y_v(y) \cdot \ddot{\theta}_v(t) = 0 \dots\dots\dots(11)$$

あるいは、次式ようになる。

$$X_v'''' \cdot Y_v + 2 X_v'' \cdot Y_v'' + X_v \cdot Y_v'''' - w / (g \cdot D_v) \cdot \omega_v^2 \cdot X_v \cdot Y_v = 0 \dots\dots\dots(12)$$

また、式(6)を式(2)に代入すれば、

$$X_e''''(x) \cdot Y_e(y) \cdot \theta_e(t) + 2 X_e''(x) \cdot Y_e''(y) \cdot \theta_e(t) + X_e(x) \cdot Y_e''''(y) \cdot \theta_e(t) \\ - \kappa^2 (X_e''(x) \cdot Y_e(y) \cdot \theta_e(t) + X_e(x) \cdot Y_e''(y) \cdot \theta_e(t)) \\ + w / (g \cdot D_e) \cdot X_e(x) \cdot Y_e(y) \cdot \ddot{\theta}_e(t) = 0 \dots\dots\dots(13)$$

あるいは、次式ようになる。

$$X_e'''' \cdot Y_e + 2 X_e'' \cdot Y_e'' + X_e \cdot Y_e'''' \\ - \kappa^2 (X_e'' \cdot Y_e + X_e \cdot Y_e'') - w / (g \cdot D_e) \cdot \omega_e^2 \cdot X_e \cdot Y_e = 0 \dots\dots\dots(14)$$

3. 不完全合成二層板の曲げ振動解析

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、板のたわみ面は次式ようになる。

$$W_v(x, y) = X_v(x) \cdot Y_v(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_n W_v \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \dots\dots\dots(15)$$

$$W_e(x, y) = X_e(x) \cdot Y_e(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_n W_e \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \dots\dots\dots(16)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots\dots; n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots)$$

式(15), (16)は四辺単純支持の境界条件を満足する。式(15)を式(12)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{w}{D_v \cdot g} \omega_v^2 = 0 \dots\dots\dots(17)$$

同様にして、式(16)を式(13)に代入すれば、有意解として、次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \kappa^2 \left[\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right] - \frac{w}{D_e \cdot g} \omega_e^2 = 0 \quad \cdots(18)$$

式(17), 式(18)より次式を得る。

$$\omega_v^2 = \pi^4 \mu_{mn}^4 \cdot \frac{D_v \cdot g}{w} \quad \cdots(19), \quad \omega_e^2 = \pi^4 \mu_{mn}^4 \cdot \frac{D_e \cdot g}{w} + \pi^2 \mu_{mn}^2 \cdot \kappa^2 \cdot \frac{D_e \cdot g}{w} \quad \cdots(20)$$

ここで、

$$\mu_{mn}^2 = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \quad \cdots(21)$$

$$(m=1, 2, 3, \cdots; n=1, 2, 3, \cdots)$$

次に、 $T = 2\pi/\omega$ であるから、式(19), (20)より固有周期の2乗は次式のように求まる。

$$T_v^2 = \frac{4\pi^2}{\pi^4 \mu_{mn}^4} \frac{w}{D_v \cdot g} \quad \cdots(22)$$

$$T_e^2 = \frac{4\pi^2}{\pi^4 \mu_{mn}^4} \frac{w}{D_e \cdot g} \frac{1}{1 + \kappa^2 / (\pi^2 \mu_{mn}^2)} \quad \cdots(23)$$

固有周期は μ_{mn}^2 に反比例、 w の平方根に比例、 E_z, I_v と g の平方根に反比例する。第一項のみをとり¹⁾、次のような比、 $(T_e/T_v)^2$ 、をとる。

$$\gamma_{11} = \left(\frac{T_e}{T_v} \right)^2 = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} \quad \cdots(24)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad \cdots(25)$$

式(24), (25)のパラメータは文献²⁾で示した静的解析および全体座屈解析のパラメータと同一であることが判る。従って、無次元量 $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ さえ求めれば、静的解析、全体座屈解析、振動解析が系統的にできることを示している。次に、不完全合成二層板の固有周期 T_v は次式で得られる。

$$T_{ve} = \sqrt{T_v^2 + T_e^2} = T_v \sqrt{1 + (T_e/T_v)^2} \quad \cdots(26)$$

式(24)を式(26)に代入し、式(4)の D_v を用いれば

$$T_{ve} = T_v \sqrt{1 + \gamma_{11}} = T_v \sqrt{1 + \beta_{11} \cdot I_{12v} / I_{12}} = T_v \sqrt{(I_{12} + \beta_{11} \cdot I_{12v}) / I_{12}} \quad \cdots(27)$$

$$\text{ここで、 } I_v = I_{12} + I_{12v}; I_{12} = I_2 + I_1/\bar{n}; I_{12v} = A_1 S_1 S / \bar{n} \quad \cdots(28)$$

式(27)における T_v および T_{ve} の "v" および "ve" はそれぞれ完全完全二層板および不完全合成二層板を意味している。

4. 数値計算例

数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しない。不完全完全二層板の一般的な諸元は次のようであるとする(図-1、2 参照)。長方形板の寸法は $a \times b = 150\text{cm} \times 450\text{cm}$, $w = 0.03526\text{kgf/cm}^2$, $E_z = 2100000\text{kgf/cm}^2$, $g = 980\text{cm/sec}^2$, $I_{12} = 24.81\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_{12v} = 20.69\text{cm}^4/\text{cm}$, $K = 866\text{kgf/cm/cm}$ (仮定する), $h_1 = 13\text{cm}$, $h_2 = 0.6\text{cm}$, $\bar{n} = 7.385$, $\nu = 0.3$ (仮定), $\nu_1 = 0.2$, $\nu_2 = 0.3$, $s = 6.8\text{cm}$,

$s_1 = 1.73\text{cm}$, $s_2 = 5.07\text{cm}$, $A_1 = 13.0\text{cm}^2/\text{cm}$, $A_2 = 0.6\text{cm}^2/\text{cm}$, $A_v = 2.360\text{cm}^2/\text{cm}$, $I_1 = 183.1\text{cm}^4/\text{cm}$,
 $I_2 = 0.018\text{cm}^4/\text{cm}$, $I_v = 45.50\text{cm}^4/\text{cm}$, $D_v = 1.050 \times 10^4 \text{kgf} \cdot \text{cm}^2/\text{cm}$.

これらの諸元を用いれば、式(3)を用いて、 $\kappa = 0.0392/\text{cm}$, $\kappa a = 5.8826$ と求まり、 $\beta_{11} = 0.2406$,
 $\alpha_{11} = 0.7594$, $\gamma_{11} = 0.2007$ と求まる。完全合成二層板の場合の固有周期は $T_v = 0.007546 \text{ sec}$ と求まる。
 不完全合成二層板の場合の固有周期は $T_{v*} = 0.008269 \text{ sec}$ と求まる。この値は $T_v = 0.007546 \text{ sec}$ を
 $\sqrt{(1 + \gamma_{11})}$; 即ち、1.0958 を乗ずれば、 $T_{v*} = 0.008269 \text{ sec}$ と求まる。

以上の数値計算例からもわかるように、パソコンと公式集などがあれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上の固有周期を求める場合に便利である。

5. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

本論文は不完全合成二層板の曲げ振動解析の偏微分方程式を示し、四辺単純支持の場合に、定量的に固有周期を求めることができるように、無次元量 α_{11} , β_{11} , γ_{11} を導入した。これらの無次元量は静的解析、全体座屈解析、振動解析において共通に利用できることが判明した。ここで、 α_{11} は合成二層板の合成度を意味し、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$ を意味し、 γ_{11} は完全合成二層板を基準にした場合の増加分を意味している。

参考文献

- 1) 佐藤浩一 : 接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、
 構造工学論文集 Vol.38A、pp.1309-1320、1992.
- 2) 佐藤浩一 : 合成二層板の合成度に関する実用的評価式について、
 構造工学論文集 Vol.39A、pp.1289-1301、1993.
- 3) 中井 博、杉山 功、広瀬鉄夫、山本晃久 : トラス型ジベルを用いた合成床版の耐荷力試験、
 土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、I-273、pp.576-577、1990.
- 4) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康 : 不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、
 土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989.
- 5) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇 : 不完全合成板の解析について、
 構造工学論文集 Vol.36A、pp.1245-1258、1990.
- 6) Koichi SATO : Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates,
 J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991.
- 7) Koichi SATO : Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates,
 J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992.
- 8) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M. :
 Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction,
 Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 9) Rudolph Szilard : Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall,
 Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 10) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells,
 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970.
- 11) 佐藤浩一 : 不完全合成板の簡易計算法について、
 土木学会第47回年次学術講演会講演概要集、I-78、pp.332-333、1992.
- 12) K.S.Pister and S.B.Dong : Elastic Bending of Layered Plates,
 J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959.