

I - 5 断面2次モーメントの減少を考慮した骨組構造の非線形解析

北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之
 北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
 北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. まえがき

骨組構造の材料非線形問題を考える場合、部材の剛性の評価が重要となる。過去の研究においては、塑性化の進み具合に応じて個々の荷重段階での剛性を刻々と変える方法や、部材を細かく分割する有限要素法、剛体バネモデルによる方法等、様々な解析が試みられている。ここでは、弾塑性状態にある一つの骨組部材を、塑性域の剛性を無視し、弾性域のみを考慮した変断面部材とみなした解析を行った。本法によれば、塑性域の広がりを算定するための要素分割をする必要がなく、通常のはり要素のみで、塑性域が求まり、パソコン程度で計算が可能である。

2. 曲げを受ける部材

材料は、図1に示す応力-ひずみ曲線となるような完全弾塑性体と仮定する。図2(a)に示すような、幅 b 高さ h なる長方形断面桁に曲げモーメントを作用させたとき、部材軸方向に端部から x の位置にある断面において、図2(b)のような応力状態、すなわち、高さ方向に $|y| \leq y_D$ で弾性、 $|y| \geq y_D$ で塑性になったとする。このとき、この断面に作用している曲げモーメントを M_x とおくと、

$$M_x = M_0 \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_D}{h} \right)^2 \right) \dots\dots\dots (1)$$

である。ただし、 $M_0 = \frac{1}{4} \sigma_0 b h^2$ 一方この部材の端部 i においてせん断力 S_i 、曲げモーメント M_i が作用しているとき(図3) x の位置での曲げモーメント M_x は、

$$M_x = M_i - S_i x \dots\dots\dots (2)$$

である。式(1)、(2)より y_D を求めると次式となり、弾性と塑性の境界線は放物線となることが分かる。

$$y_D = \frac{\sqrt{3}h}{2} \sqrt{\frac{S_i}{M_0} x + 1 - \frac{M_i}{M_0}} \dots\dots\dots (3)$$

ここで $y_D = h/2$ とおくと、

$$x = \frac{-2M_0 + 3M_i}{3S_i} = x_i \dots\dots\dots (4)$$

となり、 $x \geq x_i$ では全断面弾性である。今、塑性領域の剛性を無視すると x の断面での桁の高さは $2y_D$ であり、断面2次モーメント I_x を求めると、

$$I_x = \frac{\sqrt{3}bh^3}{4} \left(\frac{S_i}{M_0} x - \frac{M_i}{M_0} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \dots\dots\dots (5)$$

となる。図3のような $0 \leq x \leq x_i$ で I_x 、 $x_i \leq x \leq l$ で $I = \text{const}$ となる変断面部材の剛性方程式を仮想力の原理から誘導する。節点 i 、 j におけるせん断力、 y 軸方向変位、曲げモーメント、たわみ角をそれぞれ $S_i, v_i, S_j, v_j, M_i, \theta_i, M_j, \theta_j$ とし、節点間に中間荷重が無いものとして仮想力の原理から導かれる節点力と節点変位の関係は、次式のようになる。

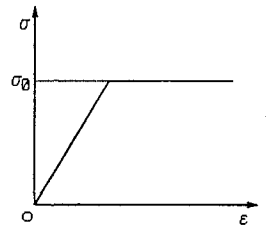


図1 応力-ひずみ曲線

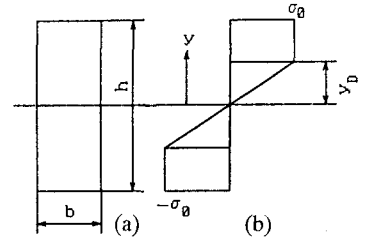


図2 σの分布

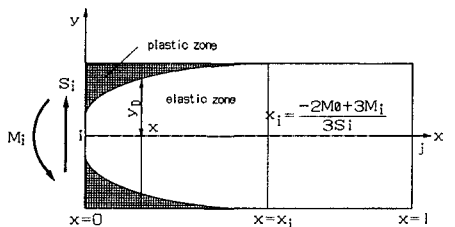


図3 断面力と塑性域

Nonlinear Analysis of Beam and Grillage Girder Considering Decrease of Moment of Inertia
 by Hideyuki HIRASAWA, Toshiro HAYASHIKAWA and Koichi SATO

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、

$$a = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx, \quad c = \int_0^l \frac{-x}{EI_x} dx, \quad d = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx \quad \dots\dots\dots(7)$$

である。aを計算すると、

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{x_i} \frac{x^2}{EI_x} dx + \int_{x_i}^l \frac{x^2}{EI} dx \\ &= -\frac{2k}{p} (px_i + m)^{-\frac{1}{2}} x_i^2 + \frac{8k}{p^2} (px_i + m)^{\frac{1}{2}} x_i - \frac{16k}{3p^3} \{ (px_i + m)^{\frac{3}{2}} - m^{\frac{3}{2}} \} + \frac{4}{bh^3 E} (l^3 - x_i^3) \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここで、 $k = \frac{4}{\sqrt{3}bh^3 E}$, $p = \frac{S_i}{M_0}$, $m = 1 - \frac{M_i}{M_0}$ とおいた。同様にして、c、dを計算し、式(6)に代入して多少の計算を進めれば、次式のような剛性方程式が求まる。

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ S_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -c & -d & dl+c \\ -c & a & c & -cl-a \\ -d & c & d & -dl-c \\ dl+c & -cl-a & -dl-c & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $D = ad - c^2$, $F = dl^2 + 2cl + a$ である。

3. 曲げとねじりを受ける部材

半径Rの円形部材に曲げとねじりが作用する場合を考える。材料は完全弾塑性体とし、降伏条件は、式(10)のvon Misesの降伏条件に従うものとする。

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2 \quad \dots\dots\dots(10)$$

断面内の応力分布は、中心を原点とするxy座標系をとり、中立軸からの距離をy、中心からの距離をrとすると、

$$\sigma = \frac{y}{R} \sigma_1, \quad \tau = \frac{r}{R} \tau_1 \quad \dots\dots\dots(11)$$

で表されると仮定する。この円形断面のある点A(x,y)が降伏したとすれば、 $\sigma = \frac{y}{R} \sigma_1$, $\tau = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \tau_1$ は、式(10)を満たす。すなわち、

$$\left(\frac{y}{R} \sigma_1\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R} \tau_1\right)^2 = \sigma_0^2 \quad \dots\dots\dots(12)$$

整理して、

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、

$$\alpha = \frac{R\sigma_0}{\sqrt{3}\tau_1}, \quad \beta = \frac{R\sigma_0}{\sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2}} \quad \dots\dots\dots(14)$$

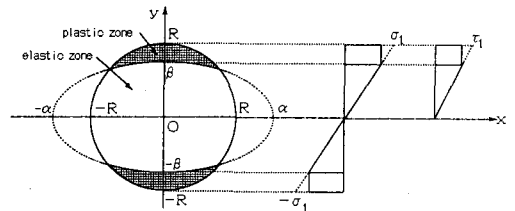


図4 円形断面の塑性域

となる。したがって断面内の塑性領域は、図4に示すように楕円の外側の部分となることが分かる。このような応力分布となる断面に作用する曲げモーメント M_x とねじりモーメント T_x を計算し、結果のみ示すと、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= 4(M_1 - M_2 + M_3) \\ T_x &= \frac{\sigma_0 R^4}{\alpha \sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{2}{9} \left(1 - \frac{\beta}{R}\right) \left(2 + \frac{\beta}{R}\right) \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta_k}{2} - \theta_k + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\alpha \beta}{R^2} \left(\frac{\sin 2\theta_l}{2} - \theta_l + \frac{\pi}{2}\right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned} \right\}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\sigma_1 \alpha \beta}{2R} \{ (\alpha^2 - R^2)A - \alpha^2 B \} \\ M_2 &= -\frac{\sigma_1 \alpha \beta^3}{6R} B \\ M_3 &= -\frac{\sigma_1 R^3}{12} \left(\frac{3}{2} \theta_k - \sin 2\theta_k + \frac{1}{8} \sin 4\theta_k \right) \\ \sigma_1 &= \frac{R \sigma_0}{\alpha \beta} \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \\ \tau_1 &= \frac{R \sigma_0}{\sqrt{3} \alpha} \\ \theta_l &= \cos^{-1} \sqrt{\frac{R^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}} \\ \theta_k &= \cos^{-1} \left(\frac{\alpha}{R} \sqrt{\frac{R^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}} \right) \\ A &= \frac{1}{2} \left(\theta_l - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_l \right) \\ B &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \theta_l - \frac{3}{4} \pi - \sin 2\theta_l + \frac{1}{8} \sin 4\theta_l \right) \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

一方、部材端iにおいて S_i, M_i, T_i が作用しているとする、 x の位置での M_x, T_x は、次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_i - S_i x \\ T_x &= T_i \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

式(15)、(17)を連立させ、節点力 S_i, M_i, T_i から、 α, β を計算し、楕円の形状を決定する。実際には解析的に求めることは困難であるので、数値的に求める。曲げを受ける部材の場合と同様に、仮想力の原理から次式が求まる。

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ T_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_j \\ \theta_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \dots (18)$$

ここで、

$$a = \int_0^l \frac{x^2}{EI_x} dx, \quad c = \int_0^l \frac{-x}{EI_x} dx, \quad d = \int_0^l \frac{1}{EI_x} dx, \quad e = \int_0^l \frac{1}{GJ_x} dx \dots (19)$$

これらより、曲げとねじりを受ける変断面部材の剛性方程式を結果のみ示すと、

$$\begin{Bmatrix} S_i \\ M_i \\ T_i \\ S_j \\ M_j \\ T_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/D & -c/D & 0 & -d/D & (dl+c)/D & 0 \\ -c/D & a/D & 0 & c/D & (-cl-a)/D & 0 \\ 0 & 0 & 1/e & 0 & 0 & -1/e \\ -d/D & c/D & 0 & d/D & (-dl-c) & 0 \\ (dl+c)/D & (-cl-a)/D & 0 & (-dl-c)/D & F/D & 0 \\ 0 & 0 & -1/e & 0 & 0 & 1/e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \theta_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} \dots (20)$$

ここで、 $D=ad-c^2$ 、 $F=dl^2+2cl+a$ である。

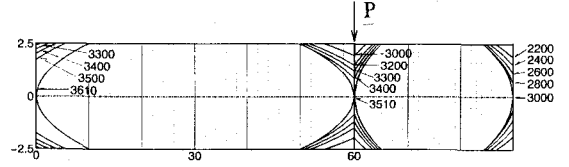


図5 両端固定桁の塑性域



図6 両端固定桁の塑性域

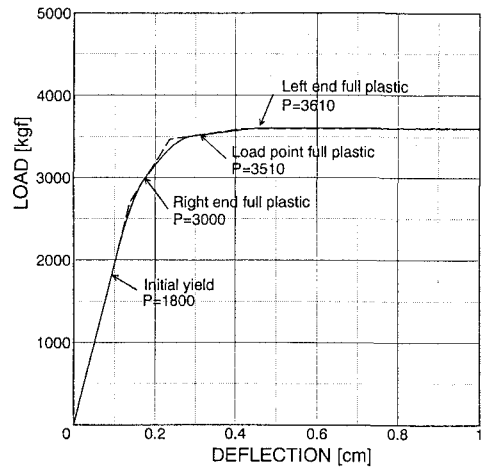


図7 荷重変位曲線

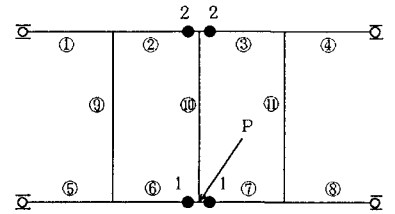


図8 格子桁

4. 数値計算例

4.1 両端固定桁

2.で得られた剛性マトリックスを用い、両端固定で2l/3の点に集中荷重が作用する桁の計算を行った。非線形計算には荷重増分法を用い、ある段階での増分荷重に対して断面力を求め、それらより次のステップの要素剛性を新たに算定し、最終的な崩壊に至るまで繰り返し計算を行っている。塑性域の進展状況を図5に示す。P=3000[kg]で右端が全断面塑性、P=3510[kg]、P=3610[kg]で載荷点、左端がそれぞれ全断面塑性となっていることが分かる。図6は、文献 1)に示されている塑性域の進展状況で、剛体バネモデルによる計算結果である。良い一致を示しているといえる。図7は荷重変位曲線である。実線は本法による結果、点線は塑性ヒンジ法による結果であるが、崩壊時のたわみは本法による解が塑性域の広がり方を考慮しているため、やや大きく得られている。

4.2 格子桁

図8に示すような主桁2本、横桁3本の格子桁に1点集中荷重が作用する場合について計算を行った。断面はそりの生じない円形断面とし、桁端は曲げに対して単純、ねじりに対して拘束である。図9は、図8に示す要素番号のうち②、

③、⑤、⑥、⑦、⑧について塑性域の進展状況を示したものである。①、④、⑨、⑩、⑪は全断面弾性である。軸方向の塑性域の広がり、断面内部の塑性域の広がりも、任意の荷重段階について求めることが可能である。図10は、載荷点における荷重変位曲線である。P=2016[kg]において部材⑥、⑦の外縁部が塑性化し、最終的な崩壊は、図8の黒丸で示した断面が全塑性状態となることにより生じる。

5. あとがき

曲げを受ける桁、曲げとねじりを受ける格子桁に関する変断面の剛性マトリックスを誘導し、完全弾塑性体と仮定したときの、材料非線形解析を行った。塑性域の広がり、節点力から算定することができるため、細かい要素分割を行い、大規模な剛性方程式を解く必要はない。本報告では、曲げとねじりを受ける部材として円形断面を扱ったが、今後の課題としては、実橋に見られる薄肉I型断面部材について、そりねじりを考慮した材料非線形解析を行うこと、ひずみ硬化の影響を考慮することが挙げられる。

<参考文献>

- 1)近藤一夫：鋼構造骨組の塑性崩壊解析、培風館、1991。 2)Philip G. Hodge, Jr, 倉西正嗣外共訳：構造物の塑性解析、コロナ社、1961。 3)W. S. King, D. W. White, W. F. Chen：Second-Order Inelastic Analysis Methods for Steel-Frame Design, J. Struct. Engrg., ASCE, 118(2), pp.408-428, 1992。 4)葉山益次郎：塑性学と塑性加工、オーム社、1982。 5)大地羊三：マトリックス構造解析、コロナ社、1977。

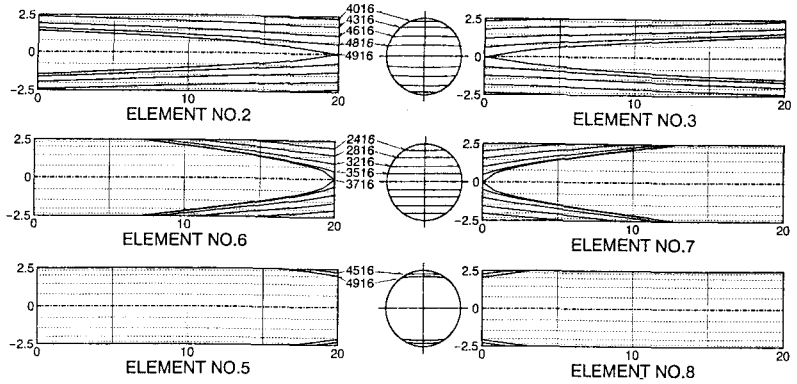


図9 格子桁の塑性域

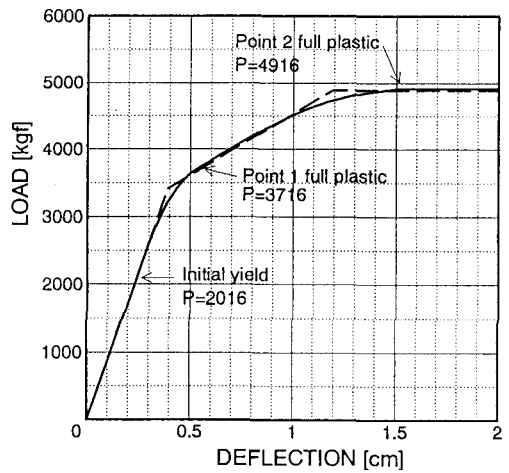


図10 荷重変位曲線