

I-4

エア・ビーム構造の大変形解析

北海道大学工学部	正 員	林 川 俊 郎
北海道大学工学部		渡 部 太一郎
清水建設(株)	正 員	小 野 武 彦
清水建設(株)	正 員	小 野 定
清水建設(株)	正 員	小 原 由 幸
北海道大学工学部	正 員	上 田 多 門
北海道大学工学部	正 員	角 田 與史雄

1. は じ め に

空気膜構造物は、その内部に空気圧をかけることにより、剛性が得られる構造形式である。その中でも、エア・マット（ネオプレン被覆したナイロン布、またはそれを数層に積層した膜材を上下の外皮として、それを落とし糸で結び付けたもの）、あるいはエア・ビーム（細長い円筒状の膜材に内圧を加え、はりとしての剛性を与えたもの）は、その軽量さから、様々な構造形態に比較的容易に対応でき、架設、維持管理、撤去等が簡便である、という利点を有している。

そのようなことから、例えば、モルタル吹き付け作業による粉塵が問題となっているNATM工法において、エア・マットをコンクリート打設時の型枠として利用する方法が考えられている。また、その軽量、簡便性ゆえに、今後各種空間確保のために使用される可能性が大である。

しかし、その扱いやすさの反面、通常の鋼構造物に比べて、その膜材としての剛性が得られても、構造物全体から見た梁としての見かけの剛性を算出するのは、容易でない。また、内圧を与えることによって生じる膜材の張力で剛性が得られるエア・ビーム構造物は、荷重の増大に伴い変形が大きくなったときに、それによって生じる圧縮応力と張力とが相殺されると、リンクリングと呼ばれるしわが発生する現象が見られ、これによりその剛性が低下する断面が出てくる。以上のことから、より簡便な数値解析手法が求められているのが現状である。

遠藤ら^{1)~4)}は、円筒断面のエア・ビーム構造物について、その梁としての見かけの剛性を実験及びシェル要素を近似的に数値解析することにより算出している。更に、その梁剛性を用いて、リンクリング現象による断面の剛性低下を考慮した、幾何学的非線形解析を行っている。

一方、林川・中村⁵⁾は、エア・マットの変形状態に占めるせん断変形の影響が大きいことに着目して、奥行き方向に一定荷重を受けるエア・マットを、奥行き方向単位幅あたりのエア・ビームとしてモデル化し、その線形解析を行っている。

本報告は、エア・ビームを簡便な2次元梁要素と見なし、Timoshenko梁理論により剛性マトリックスを定式化し、これに幾何学的非線形性を加味した形で解析を行ったものである。その際、エア・マット理論とTimoshenko梁理論との対応を考え、これにより、エアビームの梁としての剛性及び有効せん断係数の算定を行った。その上で、エア・ビーム構造の変形状態を解析したものである。

2. 解 析 方 法

2.1. エア・マット理論

外皮として、図-1のような平板状の膜を持つエア・マットを考え、上下の膜の間隔（エア・マットの厚さ）を h と置く。上下の膜は、密な間隔で落とし糸により結ばれている。落とし糸は鉛直方向にあり、伸縮

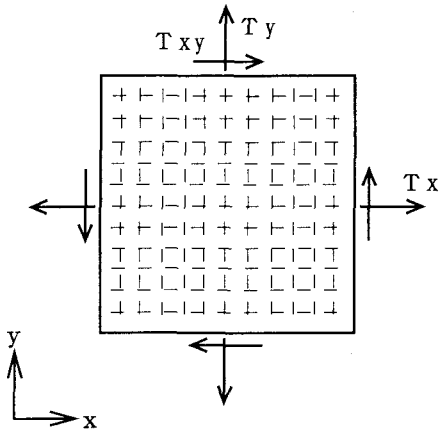


図-1 膜材に働く面内力

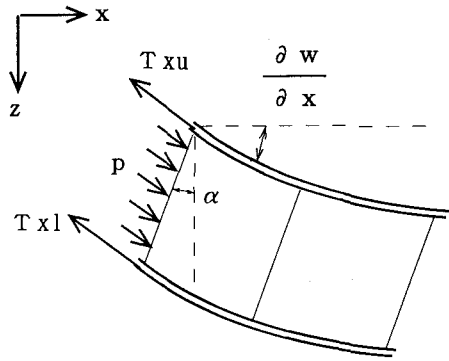


図-2 エア・マットのx方向断面力

は無視する。また、外皮は、直交する縦糸、横糸方向に弾性主軸を持つ直交異方性膜とし、曲げ剛性は0とする。X,Y座標は図の通りであり、下向きにZ軸をとる。ここで、上側の膜の面内力を T_x^u, T_y^u, T_{xy}^u 、面内ひずみを同様に $\varepsilon_x^u, \varepsilon_y^u, \gamma_{xy}^u$ とおくと、次式が得られる。

$$\varepsilon_x^u = T_x^u / (tE_x) - \nu_y \cdot T_y^u / (tE_y), \quad \varepsilon_y^u = T_y^u / (tE_y) - \nu_x \cdot T_x^u / (tE_x), \quad \gamma_{xy}^u = T_{xy}^u / (tG) \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 t =膜厚、 ν =ポアソン比、 E =外皮の膜としての弾性係数、 G =外皮のせん断弾性係数である。

上式より、 T_x^u, T_y^u および T_{xy}^u は、それぞれ次のように表せる。

$$T_x^u = C_x \varepsilon_x^u + C_{xy} \varepsilon_y^u, \quad T_y^u = C_y \varepsilon_y^u + C_{yx} \varepsilon_x^u, \quad T_{xy}^u = C_G \gamma_{xy}^u \dots \dots \dots (2)$$

ただし、

$$C_x = tE_x / (1 - \nu_x \nu_y), \quad C_y = tE_y / (1 - \nu_x \nu_y), \quad C_{xy} = \nu_y C_x, \quad C_{yx} = \nu_x C_y, \quad C_G = tG \dots \dots \dots (3)$$

また、下側の膜に関しても、全く同様の式が得られる。よって、上下の膜の面内力の和は、次式のように表せる。

$$T_x = T_x^u + T_x^l, \quad T_y = T_y^u + T_y^l, \quad T_{xy} = T_{xy}^u + T_{xy}^l \dots \dots \dots (4)$$

さらに、エア・マットの厚さ中央面のひずみは、次式のように表せる。

$$\varepsilon_x = (\varepsilon_x^u + \varepsilon_x^l) / 2, \quad \varepsilon_y = (\varepsilon_y^u + \varepsilon_y^l) / 2, \quad \gamma_{xy} = (\gamma_{xy}^u + \gamma_{xy}^l) / 2 \dots \dots \dots (5)$$

曲率は、次のように表される。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\varepsilon_x^l - \varepsilon_x^u}{h}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\varepsilon_y^l - \varepsilon_y^u}{h}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\gamma_{xy}^l - \gamma_{xy}^u}{h} \dots \dots \dots (6)$$

式(2),(4),(5)より、次式が導かれる。

$$T_x = 2C_x \varepsilon_x + 2C_{xy} \varepsilon_y, \quad T_y = 2C_y \varepsilon_y + 2C_{yx} \varepsilon_x, \quad T_{xy} = 2C_G \gamma_{xy} \dots \dots \dots (7)$$

エア・マットの断面は、図-2のように、変形前の落とし糸の方向に平行な断面を、変形後においても考えているので、エア・マットのたわみ w の他に、落とし糸のx方向およびy方向の傾斜角を α, β と置く必要がある。この時、断面に働く水平力 H 、鉛直力 Q および曲げモーメント M は、図-2の釣り合いなどより、以下のように表すことができる。

$$H_x = T_x - ph, \quad Q_x = T_x (\partial w / \partial x) + T_{xy} (\partial w / \partial y) - ph \alpha, \quad M_x = h(T_x^l - T_x^u) / 2 \dots \dots \dots (8)$$

$$H_y = T_y - ph, \quad Q_y = T_y (\partial w / \partial y) + T_{xy} (\partial w / \partial x) - ph \beta, \quad M_y = h(T_y^l - T_y^u) / 2 \dots \dots \dots (9)$$

$$H_{xy} = T_{xy}, \quad M_{xy} = h(T_{xy}^l - T_{xy}^u) / 2 \dots \dots \dots (10)$$

式(8),(9),(10)に、式(2)を代入し、式(6)を用いることにより、次式が導かれる。

$$M_x = -\frac{h^2}{2} \left(C_{xx} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{xy} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right), \quad M_y = -\frac{h^2}{2} \left(C_{xy} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{yy} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right), \quad M_{xy} = -\frac{h^2}{2} C_6 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (11)$$

また、エア・マットの端部に水平拘束がない場合、式(8),(9),(10)より、次のようになる。

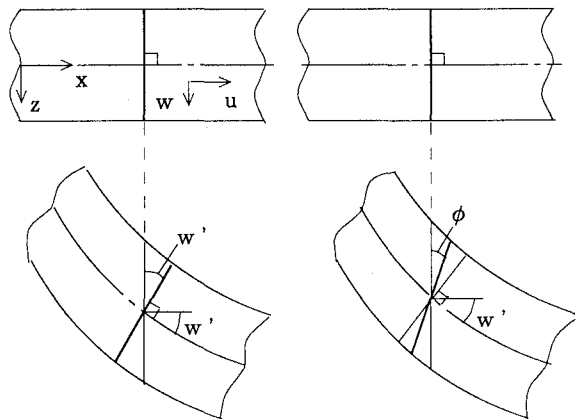
$$Q_x = ph \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right), \quad Q_y = ph \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right) \dots \dots \dots (12)$$

さらに、x方向に単純支持され、y方向に一樣な荷重を受けるエア・マットについて考えると、前述の式(11),(12)において、yに関する項が全て消えるので、単位幅あたりのせん断力 Q_x 及び曲げモーメント M_x は、結局次のように表せる。

$$Q_x = ph \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right), \quad M_x = -\frac{h^2}{2} C_{xx} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \dots \dots \dots (13)$$

2.2. Timoshenko梁理論

既往の研究から⁶⁾、エア・マット、あるいはエア・ビーム構造物においては、その変形に占めるせん断変形の割合が大きいと考えられるので、その影響を考慮した剛性マトリックスを導く必要がある。そのようなせん断変形を考慮した実用的な梁の曲げ理論の1つにTimoshenko梁理論がある。Timoshenko梁理論は、図-3に示すように、変形後も断面は平面を保っているという仮定(平面保持の仮定)を用いていることは通常の梁理論と同じであるが、異なるところは、変形前に材軸に垂直だった断面が、変形後も材軸に対して垂直になるという仮定(Bernoulli-Eulerの仮定)を用いていないことである。すなわち、



(a) Bernoulli-Euler梁 (b) Timoshenko梁

図-3 梁の曲げ変位の仮定

Timoshenko梁理論では、曲げ変位(たわみ)と断面の傾きを別個の独立な関数に置いている。このような仮定に基づいたTimoshenko梁の曲げ問題の変位関数は、次式で与えられる。

$$U(x, y, z) = -z \cdot \phi(x), \quad V(x, y, z) = 0, \quad W(x, y, z) = w(x) \dots \dots \dots (14)$$

以上の式からひずみエネルギーを計算し、仮想仕事の原理 $\delta V - \delta W = 0$ に代入し、部分積分を行うことによって、次のような釣り合い方程式と境界条件が得られる。

(1) 変分 δw に関して、

$$(\text{釣り合い方程式}) \quad G k A (w' - \phi') = 0 \dots \dots \dots (15)$$

(境界条件) はり両端($x = 0$ および L)で、

$$[G k A (w' - \phi) - Q] \delta w = 0 \dots \dots \dots (16)$$

(2) 変分 $\delta \phi$ に関して、

$$(\text{釣り合い方程式}) \quad E I \phi'' + G k A (w' - \phi) = 0 \dots \dots \dots (17)$$

(境界条件) はり両端($x = 0$ および L)で、

$$(E I \phi' - M) \delta \phi = 0 \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 k はTimoshenko梁理論で仮定された一様せん断応力をもつ物体が、実際のせん断応力分布をもつ物体に、ひずみエネルギーのレベルで等しくなるように補正する係数で、有効せん断係数と呼ばれている。 k は、その定義より、その値が小さいほど、せん断変形の影響が大きいことになる。

2.3. エアビームの断面諸元の算定

本解析では、エアビームを簡便な梁要素と見なしているために、梁要素としての見かけ上の弾性係数 E 、せん断弾性係数 G 、有効せん断係数 k を求める必要がある。これをエアマット理論における微分方程式とTimoshenko梁理論における微分方程式とを比較することで算出する。

まず、奥行き方向に一樣な荷重を受ける一方向単純支持エアマットの断面力は、奥行きを b とすると、式(13)より、

$$Q_x = ph(\partial w / \partial x - \alpha) \cdot b, \quad M_x = (h^2/2) \cdot C_x(\partial \alpha / \partial x) \cdot b, \quad C_x = tE_x / (1 - \nu_x \nu_y) \cdots \cdots (19)$$

一方、Timoshenko梁理論による曲げモーメントおよびせん断力は、式(16)、(18)より、

$$Q = GkA(\partial w / \partial x - \phi), \quad M = EI(\partial \phi / \partial x) \cdots \cdots (20)$$

以上の式(19)、(20)において、 $\phi \approx \alpha$ と近似することにより、 E 、 G 、 k は、次のような式として表される。

$$E = C_x b h^2 / 2I, \quad G = E / 2(1 + \nu), \quad k = p b h / GA \cdots \cdots (21)$$

2.4. 骨組構造の大変形解析

大変形理論は、基本三条件のうち、軸ひずみ、曲率と変位との関係式が、次のように表されるものである。

$$\varepsilon \approx (du/dx) + (dw/dx)^2/2, \quad \rho \approx -(d^2w/dx^2) \cdots \cdots (22)$$

また、各部材の変位としては、変形前の部材座標系から、変形後の材軸に関するものに変換して剛体変位を除去したものを使用する^{7)・8)}。解析手法としては、荷重増分法における各増分荷重にNewton-Raphson法を使用した。その際、各増分荷重における第一変位を推定する方法として、前の一点との割線を延長した直線近似、前の2点を利用した放物線近似、原点からの割線を利用する方法などが考えられるが、本報告においては、それらの比較検討を行った結果、簡単で安定した解が求められる直線近似によって、変位を推定した(図-4)。

3. 計 算 結 果

数値計算例としては、奥行き方向に一定荷重を受けるエア・マットから、図-5のように、有限な奥行き $b=100\text{cm}$ のエア・マット薄肉断面を取り出し、梁断面としてモデル化した。断面積

A 、断面二次モーメント I は、薄肉断面として算出し、式(21)を用いて E 、 G 、 k を求めた。解析する構造としては、以上の断面を持つ、三角形屋根及び放物線形屋根の山型ラーメンについて行った(図-6)。要素分割は、36要素、37節点とした。なお、エア・マットの膜としての弾性係数は $E_x = 800\text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比は $\nu = 0.5$ である。

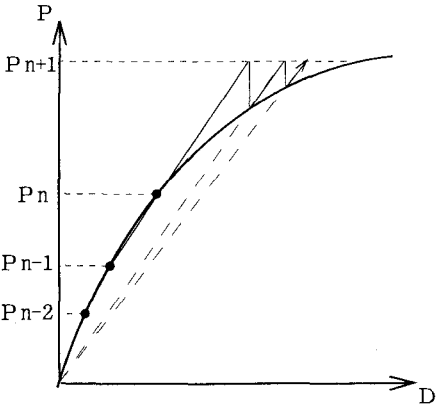


図-4 推定増分法

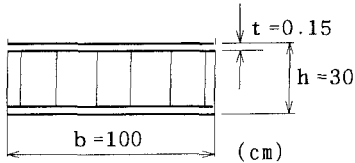


図-5 エア・マット断面

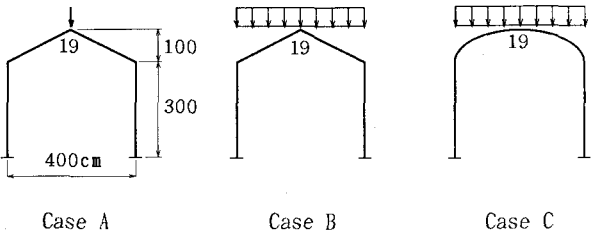


図-6 荷重載荷状態

これらの構造について、Timoshenko梁の剛性マトリックスに幾何学的非線形理論による剛性マトリックスを加えあわせ、荷重増分法の各増分荷重に際して、Newton-Raphson法による繰り返し計算を適用して、非線形解析を行った。

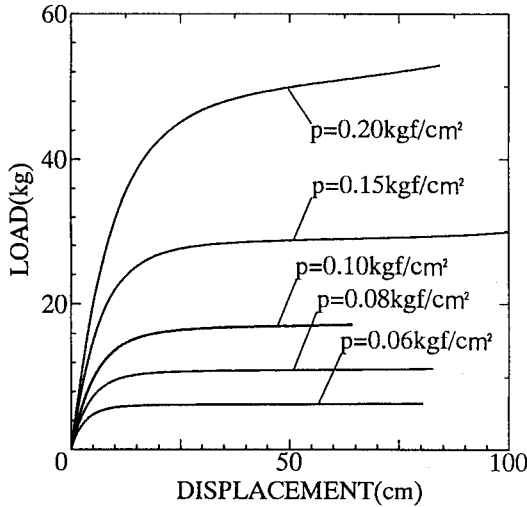


図-7 荷重-変位曲線(Case A)

図-7は、三角形形状を持つ山型ラーメンの頂点に増分荷重をかけたときの、エア・ビームの内圧 p の値の違いによる節点19の荷重-変位曲線である。内圧 p の値が大きくなると、式(21)より、有効せん断係数 k の値が大きくなり、これにより、エア・ビームの変形状に占めるせん断変形の割合が小さくなり⁹⁾、エア・ビームの梁としての剛性が大きくなることが、この図から読みとれる。また、内圧 p が増加すると、当然のことながら変位が小さくなり、その耐荷力はかなり増大することがわかる。なお、増分荷重 ΔP は 0.1kg とした。

図-8は、放物線形状の屋根を持つ山型ラーメンの屋根部各節点に、等分布载荷した際の節点19の荷重-変位曲線である。増分荷重 ΔP は 0.01kg である。図-7と同様の傾向がこの図からも読み取れる。なお、荷重の値は、各節点にかかる値を表しており、屋根部分の17個の節点について合計すれば、図-7の荷重の値とほぼ同じ値で変位が大きくなっていることが分かる。しかしながら、変位の値としては、図-7の中央一点载荷の場合に比べて、小さめの値となっていることが分かる。

図-9は、内圧 $p = 0.10\text{kgf/cm}^2$ おける、等分布载荷時の荷重-変位曲線をラーメンの屋根部の形状の違いによって、比較したものである。この図から、同じ等分布荷重に対して、三角形屋根形式の方が、放物線屋

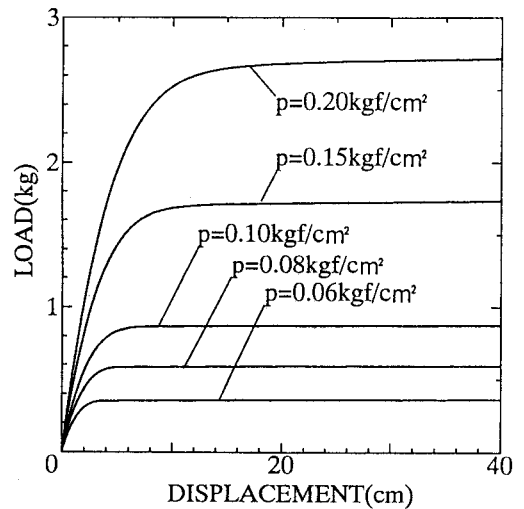


図-8 荷重-変位曲線(Case C)

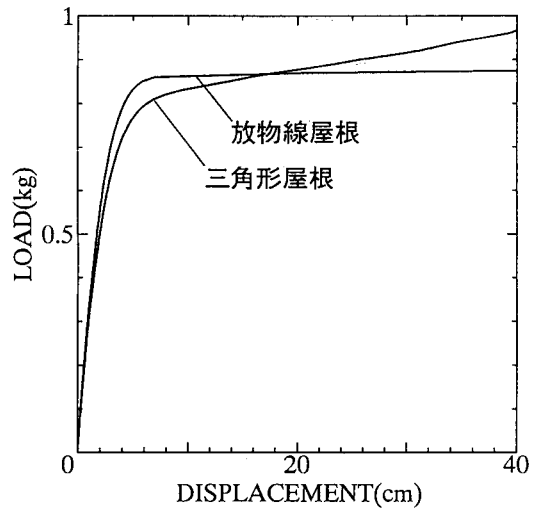


図-9 荷重-変位曲線(Case B, Cの比較)

根形式よりも、やや大きな変位を生じている。このことは、放物線屋根形式の方が、三角形屋根形式よりも、構造系全体としての剛性が高いものと考えられる。また、崩壊荷重は三角形屋根形式より、放物線屋根形式の方が大きいことが分かる。これらのことより、上部からの等分布荷重を受ける構造形式としては、放物線屋根が有利と考えられる。

図-10 (a), (b) は、それぞれ図-7と8における内圧 $p=0.10\text{kgf/cm}^2$ に対応した、解析モデルの変形状及びその要素分割を表している。荷重が増加するにつれて、変位が増大する様子がわかる。

4. おわりに

本報告は、エア・ビーム構造物の簡易解析手法の一提案であり、まだ検討の余地を残すものである。しかしながら、本解析で得られた結果より、エア・ビーム構造の剛性、崩壊荷重に与えるせん断変形の影響はかなり大きいものであること

が分かった。さらに、既往の研究と比較しても、Timoshenko梁による本報告のモデル化は、妥当なものと思われる。よって、Timoshenko梁に幾何学的非線形性を加味した本解析手法は、簡便な解析手法として、今後適用性が広いと思われる。

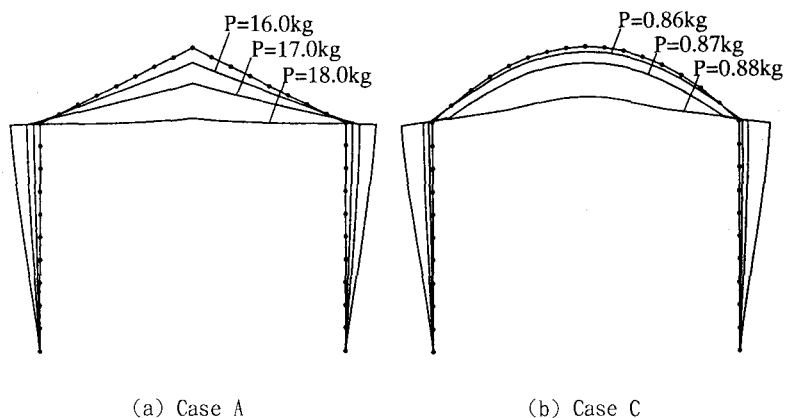


図-10 離散化状態及び $p=0.10\text{kgf/cm}^2$ における変形状

参考文献

- 1) 松永憲人、遠藤典男、三井康司、笹川明：エア・ビーム構造物の数値解析手法，土木学会中部支部研究発表会講演概要集，I-4，pp. 8～9，1990.
- 2) 遠藤典男，瀬川信哉，笹川明，三井康司：エア・ビーム構造物の剛性評価に関する考察，構造工学論文集，Vol. 38A，pp. 1324～1342，1992.
- 3) 永谷秀樹，遠藤典男，笹川明，三井康司：エア・ビーム構造物の数値解析手法に関する研究，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集，I-367，pp. 910～911，1992.
- 4) 永谷秀樹，瀬川信哉，遠藤典男，三井康司，笹川明：エア・ビーム構造物の簡易数値解析手法に関する研究，日本建築学会構造系論文報告集，第449号，pp. 133～141，1993.
- 5) 林川俊郎，中村範一：せん断変形を考慮したエアビームの曲げ解析，土木学会北海道支部論文報告集，第49号，pp. 1～4，1993.
- 6) 吉田安範，小原由幸，小野定，上田多門，林川俊郎，角田與史雄：コンクリート型枠として用いたエア・マットの変形状について，土木学会北海道支部論文報告集，第48号，pp. 881～886，1992.
- 7) 堀井健一郎，斎藤進，川原睦人，森繁：骨組構造の大変形解析，土木学会論文報告集，第191号，pp. 15～30，1971.
- 8) 前田幸雄，林正，中村守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，第223号，pp. 1～9，1974.
- 9) 藤谷義信：薄肉はり構造解析，培風館，1990.