

I-1

積層板の後座屈解析

北海道大学工学部 正員 三上 隆
 北海道大学工学部 学生員 熊谷清貴
 北海道大学工学部 正員 佐伯 昇
 北海道大学工学部 正員 芳村 仁

1. はじめに

長繊維強化複合材料からなる積層板は、従来の慣用材料に比べて比強度（強度／密度）と比剛性（剛性／密度）が極めて高いために、構造軽量化が望まれる多くの工学分野で使用され、その用途もますます拡大の方向にある。¹⁾ このような場合、座屈が設計基準の一つとして用いられるので、その挙動の解明をすることは極めて重要である。本研究では、座屈後^{2, 3, 4)}の挙動に焦点を当て、せん断変形の影響を無視した古典積層板理論とGalerkin法により、対称積層板を例に取り上げ検討を行った。

2. 座屈解析法

2-1 基礎関係式

図-1に示すような積層板に座標軸をとり、 x 、 y 、 z 軸方向の変位をそれぞれ u 、 v 、 w とする。 $\bar{N}_x$ を板に対する x 方向の圧縮負荷とし、 w_0 を初期たわみと仮定する。面内ひずみ成分と曲率成分は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

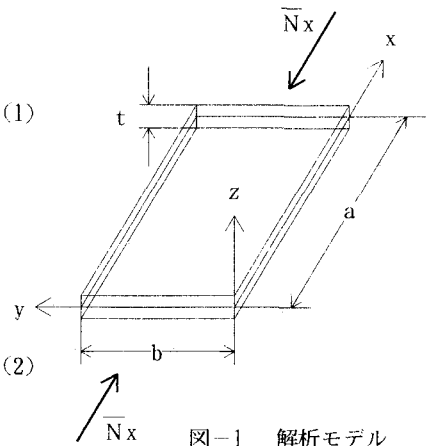


図-1 解析モデル

また、一般的な合応力成分、合モーメント成分と面内ひずみ成分、曲率成分との関係は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \dots (3)$$

Postbuckling Analysis of Laminated Rectangular Plates

by Takashi MIKAMI, Kiyotaka KUMAGAI, Noboru SAEKI and Jin YOSHIMURA

ここで、 A_{ij} は伸張剛性、 D_{ij} は曲げ剛性、 B_{ij} は伸張と曲げのカップリング剛性である。これらの諸量は弾性係数、ポアソン比が与えられ、積層構成、積層数、積層角等を与えることによって求められる。中央面に対し対称な積層の時には $B_{ij}=0$ ($i, j=1, 2, 6$)となり、さらに直交異方性の場合には $A_{16}=A_{26}=D_{16}=D_{26}=0$ となる。

本論文では、対称クロスプライ積層板について検討する。

2-2 平衡方程式と適合条件式

面内及び板厚方向の平衡方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_{11}}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &= \frac{N_x}{t} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{N_y}{t} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} + 2 \frac{N_{xy}}{t} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

応力関数を次のように定義する。

$$N_x = t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_y = t \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_{xy} = -t \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots(7)$$

上式を用いると式(6)は、

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_{11}}{t} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

適合条件式は、式(1)より u, v を消去して、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

また、板の中央面での平均軸縮み ε_m は、

$$\varepsilon_m = -\frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = -\frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad \dots\dots\dots(10)$$

で表され、平均軸圧応力、 $\sigma_1 = N_x / t$ との関係が求まる。

座屈後の挙動は、板厚方向の平衡方程式と適合条件式において、応力関数 F とたわみ w との連立偏微分方程式を、解くことにより解析できる。以下、この方程式を近似的に解くことにする。

2-3 後座屈解析

面内ひずみ成分と平面合応力成分との関係は、式(3)より次のように表すことができる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{22} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{22} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{66} &= (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) / H \\ H &= A_{11} A_{22} A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

境界条件は、以下の場合を考える。

面外境界条件

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ において } w=\partial^2 w / \partial x^2=0 \\ y=0, b \text{ において } w=\partial^2 w / \partial y^2=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

面内境界条件

$$\left. \begin{array}{l} x=0, a \text{ において、} u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy}=0 \\ y=0, b \text{ において、} v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx = 0, \quad N_{xy}=0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

面外境界条件を満足するような一次座屈後のたわみ波形 w 、初期たわみ波形 w_0 を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} w = w_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ w_0 = c_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + c_{21} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 c_{11} 、 c_{12} は初期たわみの大きさを表す。上式を適合条件式(9)に代入し、応力関数を求めると、

$$\begin{aligned} F = & \frac{1}{2t\lambda^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \left\{ \frac{\lambda^4}{16H_{22}} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} \\ & + \frac{2}{t\lambda^2} (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \left\{ \frac{\lambda^4}{256H_{22}} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} \\ & + \frac{1}{4t\lambda^2} (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \left[\frac{\lambda^4}{H_{22}} \left\{ \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right\} \right. \\ & \quad - \frac{\lambda^4}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \\ & \quad \left. + \frac{9\lambda^4}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] - \frac{\sigma_1}{2} y^2 \quad \dots\dots(16) \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda (=a/b)$ は平板のアスペクト比である。

上式を板厚方向の平衡方程式(8)に代入し、Galerkin法を適用することにより、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2 \lambda}{4b^2} w_{11} \left[\frac{D_{11}}{t} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{t} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{D_{22}}{t} \right] - \frac{1}{4\lambda} (w_{11} + c_{11}) \sigma_1 \\ & + \frac{\lambda}{64t} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{22}} (w_{11} + c_{11}) (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \\ & + \frac{\lambda}{16t} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{22}} (w_{21} + c_{21}) (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & + \frac{1}{64t\lambda^3} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{11}} (w_{11} + c_{11}) \left\{ (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) + 4(w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \right\} \\ & + \frac{1}{64t\lambda^3} \frac{\pi^2}{b^2} (w_{21} + c_{21}) (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & \times \left\{ \frac{\lambda^4}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{81\lambda^4}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right\} \\ & = 0 \quad \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^2 \lambda}{4 b^2} w_{21} \left[\frac{D_{11}}{t} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^4 + \frac{2(D_{12} + 2D_{66})}{t} \left(\frac{2}{\lambda} \right)^2 + \frac{D_{22}}{t} \right] - \frac{1}{\lambda} (w_{21} + c_{21}) \sigma_1 \\
& + \frac{\lambda}{64 t} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{22}} (w_{21} + c_{21}) (w_{21}^2 + 2w_{21} c_{21}) \\
& + \frac{\lambda}{16 t} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{22}} (w_{11} + c_{11}) (w_{11} w_{21} + w_{11} c_{21} + w_{21} c_{11}) \\
& + \frac{1}{16 t \lambda^3} \frac{\pi^2}{b^2} \frac{1}{H_{11}} (w_{21} + c_{21}) \left\{ (w_{21}^2 + 2w_{11} c_{11}) + 4(w_{21}^2 + 2w_{21} c_{21}) \right\} \\
& + \frac{1}{64 t \lambda^3} \frac{\pi^2}{b^2} (w_{11} + c_{11}) (w_{11} w_{21} + w_{11} c_{21} + w_{21} c_{11}) \\
& \times \left\{ \frac{\lambda^4}{81 H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66}) \lambda^2 + 16 H_{11} \lambda^4} + \frac{81 \lambda^4}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66}) \lambda^2 + 16 H_{11} \lambda^4} \right\} \\
& = 0 \quad \dots \dots \dots (18)
\end{aligned}$$

平均軸圧縮応力と平均軸縮みの関係は、式(10)より、

$$\epsilon_m = H_{11} t \sigma_1 + \frac{\pi^2}{8 a^2} (w_{21}^2 + 2w_{11} c_{11} + 4w_{21}^2 + 8w_{21} c_{21}) \quad \dots \dots \dots (19)$$

3. 数値計算例

図-2に、正方積層板（積層数100, $t/a=0.01$ ）の無次元圧縮応力 $K (= \bar{N}_x b^2 / E_{22} t^3)$ と平均軸縮み ϵ_m の関係を示す。

図の結果は、 $E_{11}/E_{22}=30, 40, 50$ によるもので、他の諸元は $G_{12}/E_{22}=0.6$, $\nu_{12}=0.25$ とした。ただし、式(15)の w_{11} のみを考慮し、初期たわみ $w_0=0$ の結果である。図中の数値は一次座屈値を示している。

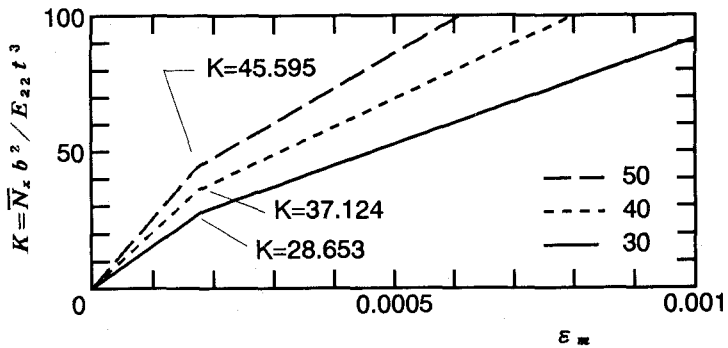


図-2 無次元圧縮応力 K と平均軸縮み ϵ_m の関係

4. おわりに

本研究は、積層板の座屈後の挙動の解析を古典積層板理論とGalerkin法により行ったものである。数値例は対称積層された場合であり、今後は他の境界条件や他の積層形式についても検討を加える予定である。

参 考 文 献

- 1) 福田博 他訳：複合材料の構造力学、日刊工業新聞社、昭和62年
- 2) Chuen-Yuan Chia：Nonlinear Analysis of Plates, McGRAW-HILL, 1980
- 3) 粕谷平和 他：圧縮負荷を受ける複合材料積層板の座屈強度、日本機械学会論文集(A編)、553号、PP. 14-19、1992
- 4) David Hui and A.W.Leissa：Effects of Geometric Imperfections on Vibrations of Biaxially Compressed Rectangular Flat Plates, Journal of Applied Mechanics, vol.50, PP.750-756, 1983