VI－２

杭頭と剛結のfootingの回転変位をChangの式から直接求める解析

ロック建設技術研究所　　正会員　　今　井　芳　雄

§１．前言

杭に関する Chang式は（1.1)式である。

$$y=\frac{1}{2EI\beta^3}\cdot e^{-\beta x}\left\{H\cdot\cos\beta x+M_t\cdot\beta(\cos\beta x-\sin\beta x)\right\}\quad\cdots(1.1)$$

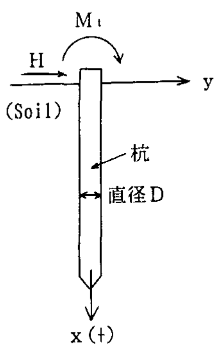

Figure 1.1

ここに　$\beta=\left(\frac{k\cdot D}{4EI}\right)^{1/4}=(長)^{-1}$

k…地盤の水平方向反力係数＝（力）×（長）$^{-2}$×（長）$^{-1}$
E…杭の弾性係数＝ 力×（長）$^{-2}$
I…杭の断面２次率＝（長）^{4}
D…杭の直径＝（長）
H…杭頭に作用する水平力
M_t …杭頭に作用するmoment

本論はこの（1.1)式及びその $\frac{dy}{dx}$ を用いるが連立することなく、杭頭に剛結してい footingの回転変位、杭頭momentを求めようとするものである。

§２．杭頭と剛結するfootingのラーメン模型

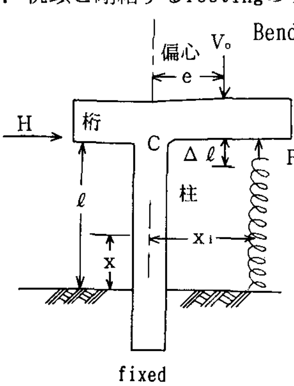

Figure 2.1

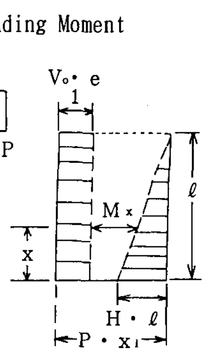

Figure 2.2

杭頭と footingが剛結の時 footing の回転変位のため杭頭に生ずるmoment M_tの模式を考える。それは、下部を fixedされ水平桁が右端で弾性支承された柱、桁のラーメンを考える。(Figure 2.1)桁の I は∞とする。

そうすればこの場合柱の弾性変形のみを考えておけば杭頭Ｃ点の回転角 ϕ は見出せる。弾性支承（Figure 2.2 spring)の反力Ｐは $P=\left(\frac{A\cdot E}{\ell}\varepsilon\right)\times\Delta\ell$ である。

Analysis directly explaining by Chang's equation to determine rotating displacement of footing fixed into Pile head.

by Yoshio Imai

ここに　A…弾性支承体の断面積，E…弾性係数，ℓ…柱の長さ

ε…係数（K_v を求める時の係数に相当する），$\Delta\ell$…弾性支承の圧縮沈下量

下部を fixedされた柱のBending Momentを M_x とすれば

$$M_x = V_o \cdot e + H(\ell - x) - \left(\frac{A \cdot E}{\ell}\varepsilon\right)\Delta\ell \cdot x_i \quad \cdots (2.1)$$

ここに $V_o \cdot e$ …水平桁（footing に相当）にかかる外力moment

柱頭C点の回転角をϕとすれば $\frac{M_x}{EI}dx = \frac{1}{R_x}dx = d\phi_x$ 　であるから

$$\phi = \int_{x=0}^{x=\ell} d\phi_x = \int_{x=0}^{x=\ell}\frac{M_x}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left(V_o \cdot e\int_{x=0}^{x=\ell}dx\right.$$

$$\left.+H \cdot \ell\int_{x=0}^{x=\ell}dx = H \cdot \int_{x=0}^{x=\ell}x \cdot dx - \frac{A \cdot E}{\ell}\varepsilon \cdot \Delta\ell \cdot x_i\int_{x=0}^{x=\ell}dx\right) \quad \cdots (2.2)$$

$$= \frac{1}{EI}\left(V_o \cdot e \cdot \ell + H\ell^2 - H \cdot \frac{1}{2}\ell^2 - \frac{A \cdot E}{\ell}\varepsilon \cdot \Delta\ell \cdot \ell\right) \quad \cdots (2.3)$$

$$= \frac{1}{EI}\ell\left(V_o \cdot e + \frac{1}{2}H \cdot \ell\right) - \frac{A \cdot \varepsilon \cdot \Delta\ell \cdot x_i}{I} \quad \cdots (2.4)$$

この求めたϕは未知量$\Delta\ell$（弾性支承沈下量）を１次の項で含む恒等式だからこれをきめるためもう一つの条件が必要である。桁（ここではfooting 相当）の I ＝∞だから　$\frac{\Delta\ell}{x_i} = \phi \quad \cdots (2.5)$

とおくことが出来る。この式の右辺も$\Delta\ell$を含むから$\Delta\ell$を左辺に集めて

$$\Delta\ell\left(\frac{I + A \cdot \varepsilon \cdot x_i^2}{x_i \cdot I}\right) = \frac{1}{EI}\ell\left(V_o \cdot e + \frac{1}{2}H \cdot \ell\right) \quad \cdots (2.7)$$

$$\therefore \Delta\ell = \frac{1}{E}\ell\left(V_o \cdot e + \frac{1}{2}H \cdot \ell\right) \times \frac{x_i}{I + A \cdot \varepsilon \cdot x_i^2} \quad \cdots (2.8)$$

この得られた$\Delta\ell$を（2.4)式に代入して柱頭C点の回転角ϕは決定される。

基礎として打ちこまれた杭は地盤の横抵抗があるからラーメン模式とは一緒でないがϕに相当するものは $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ 　で構成式が与えられるので（2.2)式相当の積分は不要である。

§ 3. Chang式の微分展開

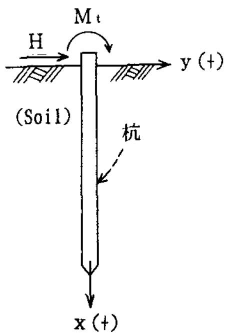

Figure 3.1

通常用いられている Changの式では杭頭 moment をM_oで表してるいが、footingにかかる外力 moment をM_oとしても用いられまぎらわしいので本論では杭頭momentをM_tとして解析を進める。Changの式は

$$y=\frac{1}{2EI\beta^3}\cdot e^{-\beta x}\left\{H\cdot\cos\beta x+M_t\cdot\beta(\cos\beta x-\sin\beta x)\right\}\quad\cdots(1.1)$$

である (Figure 3.1)。$x=0$点では $(y)_{x=0}\ \cdots\ \equiv\delta$ として(1.1) 式に代入すれば $e^{-0}=1$. $\sin\beta x=\sin 0=0$ であるから

$$(y)_{x=0}\ \cdots\ \equiv\delta=\frac{1}{2EI\beta^3}\times H+\frac{M_t}{2EI\beta^2}\quad\cdots(3.2)$$

ここでH、M_tは杭1本にかかる水平力と杭頭momentである、(1.1) 式をxで微分して$x=0$とおけば、それは杭柱の傾斜αである。このαはまた杭頭に剛結した footingの傾きでもある

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}\cdots\ =(-)\alpha=\frac{(-)1}{2EI\beta^2}\times H+\frac{(-)1}{EI\beta}\times M_t\quad\cdots(3.3)$$

ここでαはPositiveである。M_tは他の杭の杭軸反力のmomentとfooting に加わる外力の偏心momentとの代数和である。杭軸反力のmomentは footingの傾きα即ち $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}\cdots\ (-)\alpha$ の関数である。これは(2.5)式の $\frac{\Delta\ell}{x_i}=\phi$ と似た形である。

§ 4. footingの回転角α

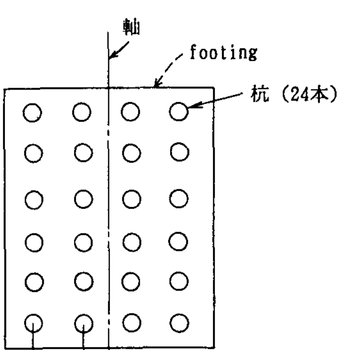

Figure 4.1

説明例題として杭24本配置の footing(Figure 4.1)において杭は footing中心に対称に配置してあるH、M_fを footingに加わる total水平力、total momentとすれば (3.3)式で表されるαは杭24本について同じであるから、杭1本分について式を展開すればよい。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}\cdots=(-)\alpha$$

$$=\frac{(-)1}{2EI\beta^2}\times\frac{H}{2本\times 12組}+\frac{(-)1}{EI\beta}\left\{\frac{1}{12組}\times M_f-\left(K_v\cdot\sum_{i=1}^{i=2}x_i^2\right)\alpha\right\}\times\frac{1}{2本}$$

$\cdots(4.1)$

が得られる。右辺はαの1次式だから H, M_f $\left(K_v \cdot \sum_{i=1}^{i=2} x_i^2 \right)$, E, I, β を与えて左辺の

(-) αにequal とおけばαを決定できる。(2.5)式の $\frac{\Delta \ell}{x_i} = \phi$ とおいたのと同じ解析手順である。αが

決定すれば(4.1) $\left\{ \quad \right\}$ 式の内がM_tである。

§5. 計 算 例

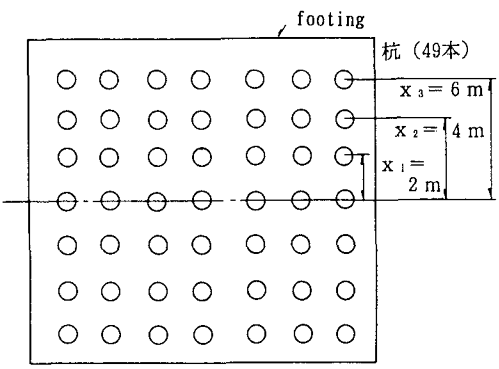

Figure 5.1

杭は鋼管、水平外力 total＝H＝1804t

footingの外力moment $M_f = 21428 \mathrm{t \cdot m}$

鋼管外径D＝0.8m　肉厚 0.012m

断面積$A = 10^{-2} \times 2.956 \mathrm{m}^2$

$I = 10^{-3} \times 2.27 \mathrm{m}^4$　杭長$\ell = 33$m

$E = 10^7 \times 2.1 \mathrm{t \cdot m^{-2}}$, $k = 10^3 \times 1.4 \mathrm{t \cdot m^{-3}}$

$$\beta = \left(\frac{k \cdot D}{4EI} \right)^{1/4} = \left(\frac{10^3 \times 1.4 \mathrm{t \cdot m^{-3}} \times 0.8 \mathrm{m}}{4 \times 10^4 \times 4.767 \mathrm{t \cdot m^2}} \right)^{1/4}$$

$$= 10^{-1} \times 2.77 \mathrm{m}^{-1}$$

$$EI = 10^4 \times 4.767 \mathrm{t \cdot m^2}, \quad EI\beta = 10^4 \times 1.32046 \mathrm{tm}$$

$$EI\beta^2 = 10^3 \times 3.6577 \mathrm{t} \qquad K_v = \frac{10^{-2} \times 2.956 \mathrm{m}^2 \times 10^7 \times 2.1 \mathrm{t \cdot m^{-2}}}{33 \mathrm{m}} \times 1.358$$

$$= \frac{10^5 \times 8.43 \mathrm{t}}{33 \mathrm{m}} = 10^4 \times 2.5545 \mathrm{t \cdot m^{-1}}$$

ここで 1.358＝係数　$K_v = \sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 = 25545 \mathrm{t \cdot m^{-1}} \times \left\{ (2\mathrm{m})^2 \times (4\mathrm{m})^2 \times (6\mathrm{m})^2 \right\}$

$= 10^6 \times 1.43052 \mathrm{t \cdot m}$　footing回転中心線が杭列上にあるから1組7本で

$\frac{1}{7組} \times M_f = 3061.143 \mathrm{t \cdot m}$ を使う

$$(-)\alpha = \frac{(-)1}{2EI\beta^{2}} \times 1804\,t \times \frac{1}{49本} + \frac{(-)1}{EI\beta} \times \left\{ \frac{M_f}{7組} - \left(K_v \cdot \sum_{i=1}^{i=3} x_i^{2} \right) \times \alpha \times 2 \right\} \times \frac{1}{7本}$$

$(-)\ (2\times 10^{3}\times 3.6577t)^{-1}$ 　 $(49本)^{-1}$ 　 $(-)(10^{4}\times 1.32046tm)^{-1}$ 　 $(-)\ 10^{6}\times 1.43052t\cdot m \times 2\alpha \times (7本)^{-1}$

$21428tm\times(7組)^{-1}$

$36.816\,t$ 　 $(-)10^{6}\times 0.40872t\cdot m\cdot\alpha$

$3061.143t\cdot m$ 　 $(7本)^{-1}$

$10^{-3}\times 5.0327radian$

$437.306t\cdot m$

$(-)10^{-4}\times 1331.177radian$

$(-)10^{-3}\times 38.150radian$ 　 $(-)(-)30.953\alpha$

$\therefore \left\{ (-)1+(-)30.953 \right\}\alpha = (-)10^{-3}\times 38.1503$ 　が得られる

$(-)31.953$

$\therefore \alpha = 10^{-3}\times 38.1503\times(-)(-)(31.953)^{-1} = 10^{-3}\times 1.19395radian = 0.001194radian$

$$M_t = \left\{ \frac{1}{7組} \times M_f - \left(K_v \cdot \sum_{i=1}^{i=3} x_i^{2} \right) \times \alpha \times 2 \right\} \times \frac{1}{7本}$$

$(7組)^{-1}$ 　 $21428t\cdot m$ 　 $(-)10^{6}\times 1.4305t\cdot m$

$0.001194radian$

$10^{3}\times 3.061143t\cdot m$

$(-)10^{3}\times 1.70804t\cdot m$

$(-)10^{3}\times 3.4161t\cdot m$

$(7本)^{-1}$

$(-)10^{3}\times 0.35498t\cdot m$

$(-)10^{3}\times 0.0507t\cdot m$

$\therefore M_t = (-)50.72t\cdot m$ 　…杭1本当たりの杭頭moment

$$(y)_{x=0}\cdots = \delta = \frac{1}{2EI\beta^{3}} \times H + \frac{M_t}{2EI\beta^{2}} = 10^{-3}\times 11.226m$$

$1804t\times(49本)^{-1}$

$(10^{3}\times 1.01383tm^{-1}\times 2)^{-1}$ 　 $(-)50.7t\cdot m\times(2\times 10^{3}\times 3.6577t)^{-1}$

$36.8163t$

$(10^{3}\times 7.3154t)^{-1}$

$10^{3}\times 2.0276tm^{-1}$

$10^{-3}\times 0.49318t^{-1}\cdot m$ 　 $(-)10^{-3}\times 6.93058m$

$10^{-3}\times 18.157m$

$10^{-3}\times 11.226m$

$\therefore \delta = 0.0113\mathrm{m}$

これら footingの回転角α、杭頭moment M_t、 footingの水平変位は変位法の連立方程式の解と完全に一致している。

§６．結言

杭頭と剛結の footingの回転変位αを Changの杭式から直接求めた。

これは Changの式 (1.1)式の $\dfrac{dy}{dx}$ の形を条件式にえらび footingの外力moment M_fと杭頭水平外力を既知とするαの１次式を得たからである。αとM_tは変位法の連立方程式から得るものと同一である可きだからその checkにもなる。

(4.1)式からは用いる杭の本数が同じのまま footingを広くすれば footingの傾斜αは小さくなることが定性的によみとれる。H、M_fがそのままの時である。

(1992-10-11)