

V-1

摩擦理論に基づく粗亀裂せん断モデル

北海道職業訓練短期大学校建築科 正 員 和田 俊良
北海道大学工学部 正 員 上田 正生

1. はじめに

本研究の目的は、コンクリート亀裂形成後のせん断変形亀裂界面でのせん断応力-せん断変位およびせん断応力-垂直応力関係を解析するために、著者らが引張軟化のために開発した摩擦理論に基づく構成則モデルを発展させ、適用範囲を拡張することである。

前報¹⁾で、著者らはコンクリート亀裂形成時の亀裂界面の微小領域(以下、微小面と称す)がある角度密度分布を有することを前提条件とし、分離界面での相互の接触挙動を摩擦せん断すべりと見なした接触密度型の数学モデルを定式化した。引張軟化解析を行い、得られた解析値と実験値を比較したところ、著者らのモデルは初期弾性場から軟化終局場まで応力の推移を精度よく追跡した。ところが、実際の構造部材に引張亀裂のみが発生・伸展することは少なく、本引張軟化モデルの実用解析への適用範囲はあまりにも狭小である。亀裂形成時に頻発する応力は、曲げ応力とせん断応力による組合わせであって、この応力場に適用可能なモデルを開発するには、著者らの引張軟化モデルの適用範囲を拡張する必要がある。そこで、本論文では、コンクリートの引張亀裂が予め発生・伸展した後、せん断が卓越する変形場をモデル適用範囲と定め、摩擦理論に基づいた粗亀裂せん断モデルを誘導する。そして、既往の実験値と解析値との比較から、著者らの手法の妥当性について若干の検討を加えるものである。

2. 摩擦破壊理論に基づく粗亀裂モデルの提案

まず本2章では、コンクリート亀裂が形成した後、せん断変形が卓越する過程での亀裂界面の物理現象面について述べる。次に、数個以上の骨材とセメントペーストから成るコンクリート粗亀裂のせん断挙動を記述するために、密度関数を用いた数学モデルを導く。本モデルでは、亀裂界面が「摩擦挙動を呈する局在化した無数の微小接触面の集合体」として構成されているものと見なすものである。

2. 1 粗亀裂のせん断挙動とモデルの概要

コンクリートに亀裂が発生し十分に伸展すると、亀裂界面は二層に完全分離する。完全分離後の亀裂界面でせん断変形が漸増すると、角度勾配が急峻な微小面から順に接触し始め、徐々に接触領域が拡大していく。角度勾配がゆるやかな微小面では、微小面に平行なせん断応力とこれに垂直な応力が同時に作用した「複合応力場」が生成される。このような応力下でせん断変形がさらに進むと、急峻な領域でのコンクリートの圧潰、ゆるやかな領域でのせん断すべり破壊が起こり、これに伴ってせん断膨張現象を呈しながら応力が保持されていく。本論文では、ここで述べた粗亀裂の力学挙動を背景とし、次の手法を採用してモデルを構築する。

最初に、亀裂界面の微小面での力学性状の取り扱いについて述べる。亀裂界面が完全に二層分離し、接触領域が存在しない界面幾何条件をモデル初期状態と設定する。複合応力下での亀裂界面のせん断すべり破壊ならびに亀裂界面周囲のモルタルの圧潰は、Mohr-Coulombの摩擦破壊基準によって判定する。微小面の応力を簡潔な関数によって取り扱い、垂直応力、せん断応力およびせん断膨張応力を独立させてそれぞれ評価し、各応力を重ね合わせて、破壊基準上の履歴応力・ひずみに依存した応力-ひずみ構成則を定式化する。

次に、コンクリートの平均応力-平均ひずみ関係を得るためには、各微小面応

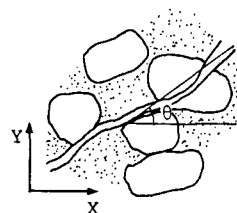


図1 亀裂形成による亀裂界面の接触

A Rough Crack Shear Model according to Frictional Failure Theory

By Toshinaga Wada and Masaiki Ueda

ートはかなり剛性を失った状態であり、せん断膨張形成方向 θ_d は亀裂の全体変位増分($\Delta\bar{\omega}$, $\Delta\bar{\delta}$)によって支配されるものとして、下式とする。

$$\theta_d = \tan^{-1}(\Delta\bar{\omega}/\Delta\bar{\delta})$$

$d\varepsilon$ は、(7)式にせん断膨張係数 ν_d を乗じて求めることにする。

$$\Delta d\varepsilon = \nu_d \cdot (\Delta\bar{\delta} \cos\theta_d + \Delta\bar{\omega} \sin\theta_d) / g_{max}$$

2. 4 微小面での応力-ひずみ関係の定式化

接触微小面での破壊基準関数に則して、応力性状を次のように区分する。順に、I) Mohr-Coulombの破壊基準内の弾性接触、II) Mohr-Coulombの破壊基準上の降伏、III) 除荷およびIV) 再接触、以上4つの領域である。

2. 4. 1 垂直応力-垂直ひずみ

図6に、微小面での垂直応力曲線の概要を示す。垂直応力曲線を完全降伏型とし、I)の弾性接触領域では、下式の線形関数となる。ここに、 R_{n0} は初期接触弾性係数である。

$$\sigma_\theta = R_{n0} \cdot \varepsilon_\theta, \quad R_{n0} = (45000 \sim 48000) \cdot F_c^{1/3} \quad (10)$$

弾性接触場の応力が上昇すると、破壊基準曲面に達し降伏する。ここでは、除荷ひずみ増分が生成されない限り、破壊基準上の応力は保持され続ける。これをII)の破壊基準上の降伏領域とし、下式とする。

$$\sigma_\theta = \sigma_m \quad (11)$$

III)の除荷領域では、図6の除荷点からの線形除荷および降伏ひずみ残留係数 r_{st} を仮定し、下(12)式で記述する。(12)式の uR_n は、除荷剛性であり、初期接触剛性より小さい値となる。

$$\sigma_\theta = uR_n(\varepsilon_\theta - \varepsilon_y) + \sigma_m, \quad uR_n = \sigma_m / (\varepsilon_y(1 - r_{st})) \quad (12)$$

亀裂が正負の繰返し载荷を担うと、微小面は一度非接触状態となり、再び接触する。これがIV)の再接触領域である。この再接触を図6の破線のように、原点と除荷点を結ぶ(13)式で取り扱うことにする。

$$\sigma_\theta = rR_n \cdot \varepsilon_\theta, \quad rR_n = \sigma_m / \varepsilon_y \quad (13)$$

2. 4. 2 せん断応力-せん断ひずみ

図7に、微小面でのせん断応力曲線の概要を示す。せん断応力曲線は、上節の垂直応力と同様の完全降伏型の関数である。せん断応力の誘導手法は垂直応力と同一なので、簡潔に記す。初期接触せん断剛性 G_{s0} を初期接触弾性係数 R_{n0} の0.5倍とし、I)の弾性接触領域を下式で表示する。

$$\tau_\theta = G_{s0} \cdot \gamma_\theta, \quad G_{s0} = 0.5 \cdot R_{n0} \quad (14)$$

II)の破壊基準上の降伏領域を、下式で記述する。

$$\tau_\theta = \tau_m$$

III)の除荷領域では、線形関数(16)式を採用する。

$$\tau_\theta = uG_s(\gamma_\theta - \gamma_y) + \tau_m, \quad uG_s = \tau_m / (\gamma_y(1 - r_{st})) \quad (16)$$

IV)の再接触領域では、(17)式とする。

$$\tau_\theta = rG_s \cdot \gamma_\theta, \quad rG_s = \tau_m / \gamma_y \quad (17)$$

2. 4. 3 せん断膨張応力-せん断膨張ひずみ

図8に、微小面のせん断膨張曲線の概要を示す。前述したように、亀裂微小面のせん断膨張は、微小面

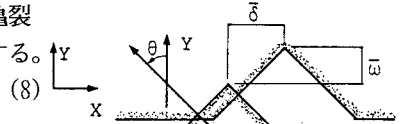


図4 微小面でのひずみ場の定義

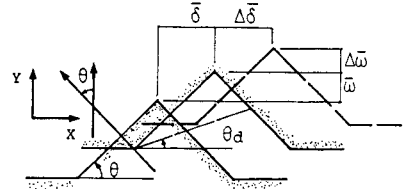


図5 微小面でのせん断膨張ひずみ場の定義

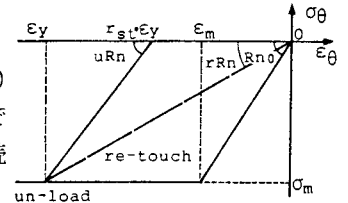


図6 微小面の垂直応力曲線の概要

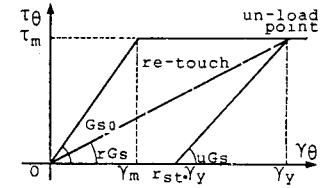


図7 微小面のせん断応力曲線の概要

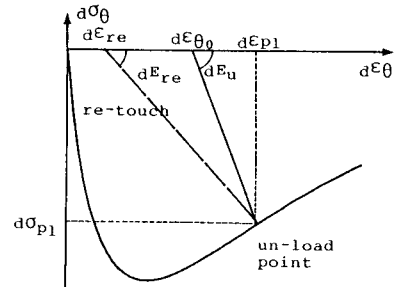


図8 微小面のせん断膨張曲線の概要

(15)

の破壊後に定義する。微小面のせん断膨張応力 $d\sigma_\theta$ の包絡曲線は、せん断ひずみ $d\epsilon$ を用いて下式のように、係数 k と P による指数関数で表示する。ここに、 D_i はせん断膨張剛性係数である。

$$d\sigma_\theta = dE \cdot d\epsilon_\theta \cdot \exp(-k \cdot d\epsilon_\theta^P) \quad , \quad dE = D_i \cdot R_{\sigma 0} \quad (18)$$

包絡曲線からの除荷は、線形除荷を仮定して(19)式で取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_\theta &= -dE_u \cdot (d\epsilon_\theta - d\epsilon_{pl}) + d\sigma_{pl} \\ dE_u &= d\sigma_{pl} / (d\epsilon_{pl} - d\epsilon_{\theta 0}) \quad , \quad d\epsilon_{\theta 0} = r_{st} \cdot d\epsilon_{pl} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

一度、非接触状態となった微小面が再接触する場合、亀裂界面の不整合ならびにモルタルの損傷が考えられる。このため、再接触と同時にせん断膨張ひずみは増加するものとし、 $(d\epsilon_{re}, 0)$ と包絡曲線上の除荷点を結ぶ関数を再接触経路とした。せん断膨張応力発生ひずみ $d\epsilon_{re}$ は、再接触せん断膨張ひずみ係数 r_{di} を除荷到達ひずみ $d\epsilon_{\theta 0}$ に乗じて求める。

$$d\epsilon_{re} = r_{di} \cdot d\epsilon_{\theta 0} \quad (20)$$

$$d\sigma_\theta = -dE_r (d\epsilon_\theta - d\epsilon_{re}) \quad , \quad dE_r = d\sigma_{pl} / (d\epsilon_{pl} - d\epsilon_{re}) \quad (21)$$

コンクリート亀裂微小面が非接触であるとき、すべての応力は零となる。これを本モデルの支配則として下式で表示する。

$$\text{if } \epsilon_\theta > 0, \sigma_\theta = 0, \tau_\theta = 0, d\sigma_\theta = 0 \quad (22)$$

微小面での応力-ひずみ関係を定めるために、 r_{st} 、 ν_d 、 k 、 P ならびに r_{di} をモデルに導入した。これらの諸物理係数の値については、3章で後述する。

2. 5 平均応力-平均ひずみの誘導

本節では、亀裂界面の各微小面の応力からコンクリートの平均応力-平均ひずみを求める積分手法について述べる。まず、微小面の応力成分を方向余弦を用いて全体座標軸上に逆変換した応力を求める。そして、この応力に接触面積有効率 K および接触密度関数 $\Omega(\theta, \theta_0)$ を乗じ、これを $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ の区間で角度積分する。ここに、 K は(24)式とし、求積にはsimpsonの台形公式を使用する。

$$\bar{\sigma} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sigma_\theta \cos\theta + \tau_\theta \sin\theta + d\sigma_\theta \cos\theta_d) \cdot K \cdot \Omega(\theta, \theta_0) d\theta, \quad \bar{\tau} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\sigma_\theta \sin\theta + \tau_\theta \cos\theta - d\sigma_\theta \sin\theta_d) \cdot K \cdot \Omega(\theta, \theta_0) d\theta \quad (23)$$

$$K = 1 - 2\bar{\omega}/g_{max} \quad (24)$$

最後に、 $\Omega(\theta, \theta_0)$ として、接触角度の密度分布パラメータ θ_0 によって連続して変化する、(25)から(28)式を設定した。粗面の集合体となる場合($\theta_0 \geq 0$)は、(25)式となる。

$$\Omega(\theta, \theta_0) = C(\theta_0) \cos \frac{\pi(1\theta - \theta_0)}{\pi - 2\theta_0} \quad , \quad C(\theta_0) = \frac{\pi}{2(\pi - 2\theta_0)(1 + \sin(\pi\theta_0/(\pi - \theta_0)))} \quad (25)$$

亀裂界面が平滑面の集合体となる場合($\theta_0 < 0$)は、下式とする。

$$\Omega(\theta, \theta_0) = C_1(\theta_0) \cos \left(\frac{\pi(1\theta - \theta_0)}{\pi - 2\theta_0} \right) - C_2(\theta_0) \sin(21\theta) \quad (26)$$

$$C_1(\theta_0) = 0.5 \cdot \left\{ \frac{\pi - 2\theta_0}{\pi} \left(1 + \sin \frac{\pi}{\pi - 2\theta_0} \right) - \left(\frac{2\theta_0}{\pi} \right)^2 \cos \left(\frac{\pi}{\pi - 2\theta_0} \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) \right) \right\}^{-1} \quad (27)$$

$$C_2(\theta_0) = \left(\frac{2\theta_0}{\pi} \right)^2 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{\pi - 2\theta_0} \left(\frac{\pi}{4} - \theta_0 \right) \right) \quad (28)$$

図9および図10に、(25)から(28)式でパラメータ θ_0 を変動させた接触角度密度曲線を示す。

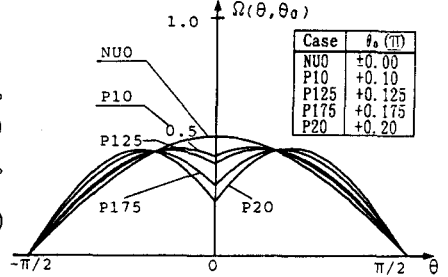


図9 粗面の接触確率密度曲線

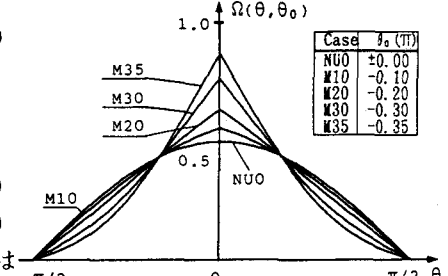


図10 平滑面の接触確率密度曲線

表1 Paulayのコンクリート性状

F_c' (kgf/cm ²)	σ_u (kgf/cm ²)	g_{max} (cm)
316.1	25.0	1.6

F_c' : コンクリート軸圧縮強度

σ_u : コンクリート引張強度 g_{max} : 最大骨材寸法

3. 本粗亀裂せん断解析と実験結果の比較・検討

3章では、既往の実験資料に基づく本解析結果と実験結果を比較し、本手法の基本力学性状について検討を加える。本論文で採用した実験は、亀裂幅を一定に保った「Paulayの単調載荷実験³⁾」と「李・前川による正負交番繰返し載荷実験²⁾」の2例である。なお、解析に際し、simpsonの台形公式の離散化積分区間数をすべて200としている。

3. 1 Paulayの単調載荷実験結果と本解析値との比較

Paulayの実験は、コンクリートに誘発させた亀裂幅を0.125mm、0.25mmおよび0.5mmと一定に保ちながらせん断変位を漸増させ、亀裂界面でのせん断応力-せん断変位関係のみを明らかにしたものである。表1に、Paulayのコンクリートの材料性状を示す。表中のコンクリート引張強度 σ_u の値は、著者らが解析のために設定したものである。本節では、単調載荷せん断試験体を解析して、摩擦破壊理論から誘導した本モデルの基本骨格の妥当性を検討する。単調せん断解析を行うには、前章で設定していない物理係数のうち、接触角度密度関数のパラメータ θ_0 を定める必要がある。そこで θ_0 の解析値への影響を調べるために、 θ_0 のみを -0.35π 、0そして $+0.175\pi$ と変動させた解析を行う。

図11に、本解析値とPaulayの実験値との比較を示す。3種の解析結果より、 $\Omega(\theta, \theta_0)$ の密度分布の違いによる影響は大きく、亀裂界面がより平滑になるほど負担せん断応力が減少する。これは、著者らの引張軟化解析結果と異なるものである。実験値と本解析値を比較すると、3種の解析のうち θ_0 を 0.175π としたものが実験値によく近接している。本解析は、低応力状態で実験結果よりも小さい値をとり、これ以後、実験曲線とよく一致するものの、最大応力近傍で剛性が低下せず、実験値よりも大きいせん断応力を与える。この傾向は、亀裂幅が小さくなるほど顕著になる。しかしながら、本解析値はわずかな相違を見せるが、実験結果をよく追跡しているものと思われる。著者らが設定した摩擦破壊基準による解析には、 $\theta_0 = 0.175\pi$ 程度が妥当と思われ、以後の解析にはこの値を採用する。

3. 2 李・前川の正負交番繰返し載荷実験結果と本解析値との比較

李・前川は、亀裂幅を一定とした逆対称二点載荷形式の正負交番繰返し実験を行い、亀裂界面でのせん断応力-せん断変位ならびにせん断応力-垂直応力関係を明らかにした。この実験結果と本解析値との比較から、本モデルの粗亀裂の繰返し挙動への適応性の検証を試みる。表2に、本解析に使用した物理係数を掲げ、表3に李・前川のコンクリート性状を示す。表2の物理係数は、パラメータスタディーによって設定したものであるが、その全容を詳述するには紙幅に限度があ

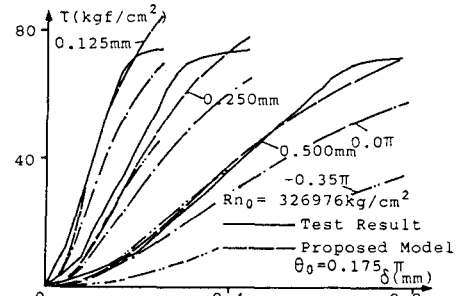


図11 本解析値とPaulayの単調載荷実験値との比較

表2 本モデルの使用係数

$\theta_0 (\pi)$	r_{st}	ν_d	D_i	k	P	r_{dt}
0.175	0.75	0.5	0.2	20.0	0.65	0.5

表3 李のコンクリート性状

f'_c (kgf/cm²)	σ_u (kgf/cm²)	g_{max} (C m)
398.0	25.0	1.5

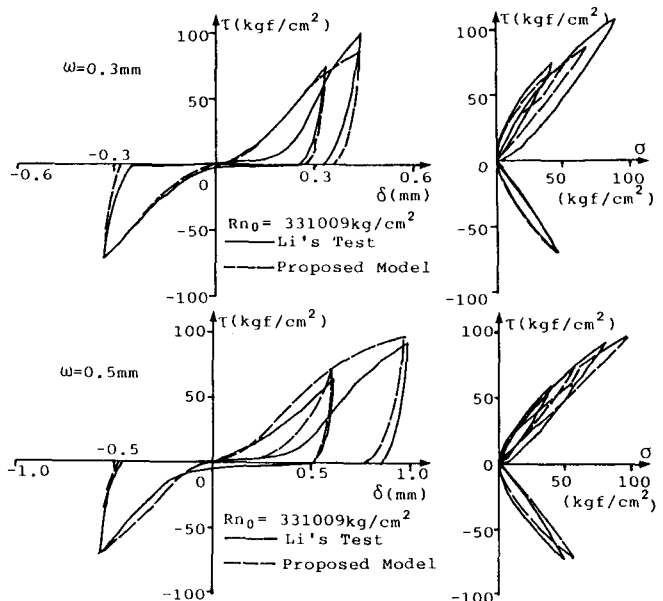


図12 本解析値と李の交番繰返し載荷実験値との比較

るので、本論文では結果のみを示す。図12に、本解析値と李の実験値との比較を掲げる。

まず、亀裂幅 w を0.3mmとした場合について検討を加える。せん断応力-せん断変位関係では、除荷時の残留変位が実験値よりも若干大きめであるが、包絡曲線ならびに再載荷経路とも解析値は実験値とよく一致している。一方、せん断応力-垂直応力関係では、正載荷経路において解析値は垂直応力を全般に小さく評価し、実験曲線の傾向を定性的に追従するのみである。しかしながら、図12中のせん断応力-せん断変位図での最大応力実験値は、せん断応力-垂直応力図でのそれと一致しておらず、本解析値の実験値への不適合を一概に論じることはいえない。

次に、亀裂幅 w を0.5mmとした場合を見る。せん断応力-せん断変位関係において、正載荷包絡曲線で解析は実験よりも大きな値を示し、再接触経路の高応力場で実験値と乖離して、再接触後の包絡曲線上の応力低下を表現しない。これは、著者らが定式化した亀裂接触微小面の応力-ひずみ曲線において、再接触による応力低下を取り扱っていないためである。せん断応力-垂直応力関係では、解析は実験垂直応力より大きな値をとっている。また、再載荷経路でせん断応力が急激に増加して、実験曲線の単調増加傾向をシミュレートしていない。

本解析手法は亀裂界面に摩擦破壊理論を適用しているが、既往の研究に接触異方塑性を考慮したBujadham・前川の一般化モデル⁴⁾がある。この実験資料には最大骨材寸法が明記されておらず、本手法での解析は不可能なので、本解析値とBujadhamの解を直接比較することはできない。そこで、参考のために、コンクリート圧縮強度が李の実験とほぼ等しい試験体を取り上げ、Bujadhamの解析結果と実験結果のみを図13に示す。これより、Bujadhamの解析は、亀裂幅が0.5mmのとき、せん断応力および垂直応力とも実験値よりかなり大きく評価していることが分かる。

4. まとめ

本論文では、Mohr-Coulomb則を破壊判定基準とした著者らの引張軟化モデルを発展させ、粗亀裂せん断モデルを誘導した。本モデルを用いて、亀裂幅を一定に保持した単調載荷試験体と正負交番繰返し試験体を解析し、亀裂界面でのせん断応力-せん断変位ならびにせん断応力-垂直応力関係について解析値と実験値とを比較・検討した。摩擦理論に基づいた粗亀裂せん断モデルは、単調載荷経路、繰返し挙動下の包絡曲線、除荷および再接触経路をほぼ満足できる精度でシミュレートした。これより、亀裂機構を追跡できるより適用範囲の広い摩擦モデル開発の可能性が高いことが明らかにされたものと思われる。今後、コンクリート試験体のせん断載荷実験を行って、無亀裂場からせん断亀裂形成までのプロセスに追従できる接触密度関数による摩擦構成則モデルを作成する予定である。

〔参考文献〕

- 1) 和田俊良、上田正生、下村倫章：摩擦破壊基準と骨材接触密度関数によるコンクリートの一構成則モデル、日本建築学会北海道支部研究報告集、1992. 3
- 2) 李宝禄、前川宏一：接触密度関数に基づくコンクリートひびわれ面の応力伝達構成式、コンクリート工学、Vol. 26, No. 1, 1988. 1
- 3) Zedencik P, Baznt and Pietro Ganbarova : Rough Cracks in Reinforced Concrete, Journal of Structural division ST4, pp. 819-842, April 1980
- 4) Buja Bujadham, Tetsuya WISHIWA and Koichi MAEKAWA : Verification of the Universal Stress Transfer Model, Proc. of JSCE NO. 451/V-17, pp289-300, August 1992

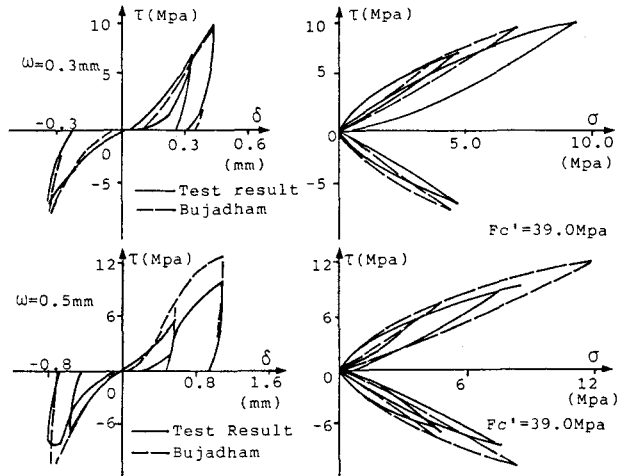


図13 Bujadhamの解析値と交番繰返し載荷実験値との比較