

II-78

振動流中の円柱に加わる圧力について

北見工業大学工学部

正員 佐藤幸雄

北海道大学工学部

正員 浜中健一郎

北見工業大学工学部

学生員 千葉俊夫

I. まえがき

従来、海中に円柱あるいは鋼管等を用いた海洋構造物は数多くあり、最近では海中の輸送システムにパイプライン構造のものが考えられている。このような円柱ならびに鋼管の構造物を設計する場合、重要な点は円柱および鋼管に加わる波による圧力である。断面が円形で2次元的な場合、振動流中におかれた円柱のまわりの流れの様子については、円柱の表面近傍で剝離が発生しないときには、ポテンシャル理論によって流れの様子が解析的に求められるが、振動流の振幅が次第に大きくなると、円柱表面に剝離が発生するようになり、このような状態の流れの様子については解析的には求めることが出来ない。また、円柱のまわりに剝離が発生する場合と、発生しない場合では、円柱に加わる圧力も異なってくることも考えられる。そこで、本研究では、水平振動流中に流れに垂直方向、水平に円柱をおいた場合について、まず、円柱の表面に剝離が発生する場合、基礎方程式に渦度方程式と流れ関数についてのポアソン方程式を用いて円柱のまわりの流れの様子を数値解析により求めてみた。さらに流れの状態が定常状態に達したとき、円柱に加わる圧力を圧力に対するポアソン方程式を用いて求めた。一方剝離を伴わない場合については従来のポテンシャル理論とベルヌイの式を用いて求めることにした。

上記2つの方法により求めた圧力について、それぞれ、水平方向圧力成分を円柱のまわり1周について積分し、その合圧力を使用して剝離の有無に対する円柱に加わる圧力の差異を比較検討した。

II. 理論および計算方法

(1) 剝離を伴う場合

基礎方程式としてNavier-Stokesの式を用いる。いま流れを垂直2次元として、 x を水平軸、 y を垂直軸とし流れ関数 ψ 、渦度を ω とすると、無次元化された渦度方程式とポアソン方程式は

$$\omega_t = -\psi_y \omega_x + \psi_x \omega_y + \nu \Delta \omega \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2)$$

と表わされる。この $x-y$ 平面で原点に中心を持ち z 方向に伸びる円柱を考えたとき、円柱の半径を R_0 として、そのまわりの振動流を考える。

流れの境界条件を表すため、有次元量の変数に、

円柱表面上、 $R' = R'_0$ ($r' = 0$) のとき

$$u' = v' = 0 \quad (3)$$

$R' = \infty$ ($r' = \infty$) のとき、 $v' = 0$

$$u' = \sigma' A' \sin \sigma' t', \quad \omega' = 0 \quad (4)$$

全変量を R'_0 と $\sigma' = 2\pi/T'$ を用いて無次元化

すると、

$$x = x'/R'_0, \quad y = y'/R'_0, \quad R = R'/R'_0,$$

$$t = \sigma' t', \quad A = A'/R'_0, \quad u = u'/\sigma' R'_0,$$

$$v = v'/\sigma' R'_0, \quad \psi = \psi'/\sigma' (R'_0)^2, \quad \omega = \omega'/\sigma',$$

$$\nu = \nu'/\sigma' (R'_0)^2, \quad \nu: \text{動粘性係数}$$

$$\text{式(3)、(4)は } R=1(r=0) \text{ で } \psi=u=v=0$$

$$R=\infty(r=\infty) \text{ で } v=0, u=A \sin t, \omega=0$$

つぎに、以下のような等角写像を用いた座標変換を行う。

$$x = e^{i\theta} \cos \theta, \quad y = e^{i\theta} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

Fluid Pressure around a Circular Cylinder in Oscillating Flow

by Yukio SATO, Ken-ichiro HAMANAKA and Toshio CHIBA

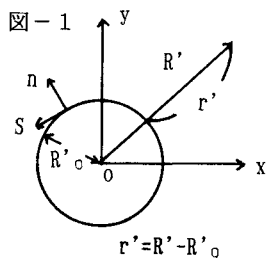


図-1
この場合、 $r=0(R=1)$ が円柱表面を表す。
式(7)を用いて基礎方程式の式(1)、(2)を (r, θ) 平面に変換すると、

$$J\omega_t + (\omega_r \psi_\theta - \psi_r \omega_\theta) - \nu(\omega_{rr} + \omega_{\theta\theta}) = 0$$

$$-J\omega = (\psi_{rr} + \psi_{\theta\theta}) \quad (8)$$

$$J = e^{2r}, J; \text{ヤコビアン}$$

また境界条件は、 $r=0$ で $\psi_r = \psi_\theta = 0$ (9)

$$r=\infty \text{ で } \psi_r = \psi_x X_r + \psi_y Y_r = (Ae^r \sin t) * \sin \theta \quad (10)$$

さらに、円柱表面近傍で座標平面を細かくするため、つぎのような式(11)を使用する。

$$r = r_T (e^{b\zeta} - 1) / (e^b - 1) \quad (11)$$

ここで ζ 軸は等間隔にとり、 $b>1$ とする。

したがって、 $0 \leq \zeta \leq 1$ に対応して、

$0 \leq r \leq r_T$ となり、 b の値が大きい程、境界近傍で細分割される。

ψ と ω を θ 軸に沿ってFourier級数に展開すると、式(8)で表される基礎方程式は、 t と r に関する偏微分に帰着される。これらの方程式を差分化すると、流れ関数はGaussの消去法により数値的に解くことが出来る。

$$\psi = \sum f_m e^{im\theta}, \quad \omega = \sum g_m e^{im\theta} \quad (12)$$

また、 ψ 、 ω に関して、たとえば、

$$\psi_\theta = \sum (im) f_m e^{im\theta} \rightarrow \psi^{(im)} \text{ と書いて}$$

式(8)を表すと、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J^{-1} \zeta_1 (\omega^{(im)} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \psi^{(im)})$$

$$+ J^{-1} \nu (-\omega^{(m^2)} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta})$$

$$- J g_m = -m^2 f_m + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial f_m}{\partial \zeta} \quad (13)$$

ここで、

$$\zeta_1 \equiv \frac{d\zeta}{dr} = \frac{e^b - 1}{br_T} e^{-b\zeta} \quad \zeta_2 \equiv \frac{d^2 \zeta}{dr^2} = -b \zeta_1^2$$

(14) である。

また、流れ関数に対する境界条件は、

$$r=0, \quad \zeta=0 \text{ で } f_m=0, \quad \partial f_m / \partial r=0 \quad (15)$$

$r=r_T, \quad \zeta=1$ で f_1 の $\sin \theta$ 成分について式(10)、(12)より $\partial f_1 / \partial r = Ae^r \sin t$,

$$\partial f_m / \partial r=0 \quad (m \neq 1) \quad (16)$$

さらに、渦度方程式に関する境界条件は、

$$r=r_T \text{ で } \omega=0 \quad (17)$$

また、円柱表面では、 ψ を $\zeta=0$ まわりでTaylor展開して

$$\psi(\Delta \zeta) = \psi + \Delta \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2}$$

ただし、 $\zeta=0$ で $\psi = \psi_\zeta = 0$ 、さらに、

$$\omega = -J^{-1} (\psi_{rr} + \psi_{\theta\theta})$$

$$= -J^{-1} (\zeta_1^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \zeta})$$

$$= -J^{-1} \zeta_1^2 (\frac{2\psi(\Delta \zeta)}{\Delta \zeta^2}) \quad (18)$$

式(13)、(14)を用いて、 $\Delta \zeta$ に関しては中央差分を施し、 Δt に関して前進差分をとって、上記の境界条件を用いて数値的に解くこととした。

つぎに、円柱のまわりの圧力を求めるため、運動方程式から加速度項を消去し、流れ関数に対するつぎのような無次元圧力方程式を用いる。

$$P_{xx} + P_{yy} = 2(\psi_{xx} \psi_{yy} - (\psi_{xy})^2)$$

$$\text{ここで、} P = P' / (\rho' (\sigma')^2 R_0) \quad (19)$$

円柱表面上の圧力に関する境界条件は、

$$P_n = \nu \omega_s \quad (20)$$

ただし、 n は円柱表面に対し法線方向、 s は接線方向を表す。計算領域の外側における境界条件は

$$u = A \sin t \quad \text{であるから、}$$

$$p_x = -A \cos t \text{ または } p = (-A \cos t) \cdot x \quad (21)$$

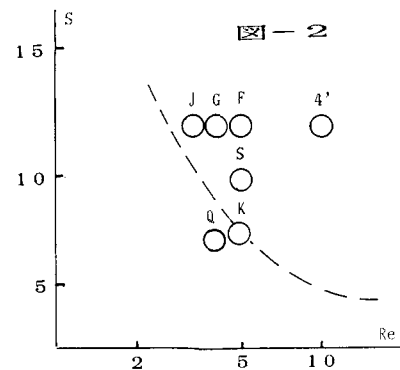
である。式(19)、(20)、(21)に対して、前出と同様の等角写像と式(11)の座標変換を行い圧力 P も式(12)のように θ 方向にFourier級数に展開するその後、中央差分を施し、渦度と流れ関数の値を使用すると数値的に解くことができる。

計算は表-1に示すような計算条件で行った。表-1中で M, N は r 方向と θ 方向の格子の数で、 N_T は1周期の分割数 $\Delta t = 2\pi / N_T$ である。

図-2は表-1の計算条件を横軸レイノルズ数 Re 縦軸にストローハル数 S を取ってプロットしたものである。 Re が一定のとき、 S が大きい方が、また、 S が一定のとき Re の大きい値の方が剥離を越し易く、渦構造が複雑となると云える。図中の破線は剥離を起こす場合と起こさない場合のおおよその境界線を示したものである。表-1のRUNの中より Re 、 S が共に大きい場合のRUN 4' 共に小さいRUN Qの場合について、渦度 ω 、流れ関数 ψ および圧力 P の値をそれぞれContour図で示すと、図-3 (RUN 4'、渦度)では剥離渦が形成される様子がみられる。図-4 (RUN 4'、流れ関数)では渦の形成のために流線はポテンシャル流の場合のように左右対称とはならないことが分かる。図-5は円柱のまわりの圧力場のContour図であり上下の領域ではほぼ対称になっているが左右はやはり非対称的な圧力分布を示すと云える。図-6~8はRUN Qの場合の同様なContour図を示したものであり、若干渦の形成は見られるが、 ω 、 ψ および P の図はいずれもRUN 4'の場合より穏やかな様子を示していると云える。

表-1 計算条件

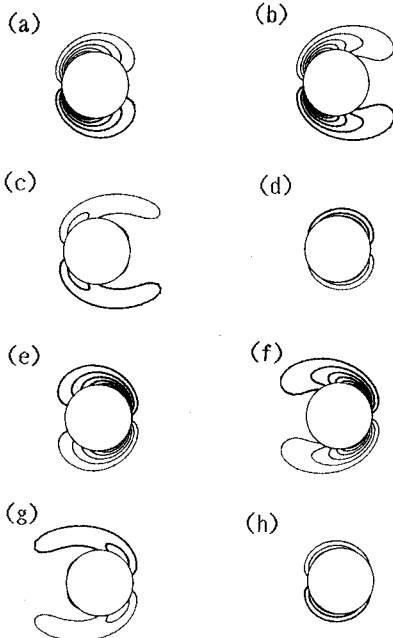
RUN	M	N	r	b	NT	A	ν	CYCLES
4'	64	40	2.7	1.0	3200	2.0	0.2	3
F	64	40	2.7	1.0	8000	2.0	0.4	3
G	64	40	2.7	1.0	8000	2.0	0.5	3
Q	64	40	2.7	1.0	8000	1.1	0.27	3
K	64	40	2.7	1.0	8000	1.2	0.25	3
S	64	40	2.7	1.0	8000	1.8	0.32	3



RUN 4' 渦度 ω

図-3

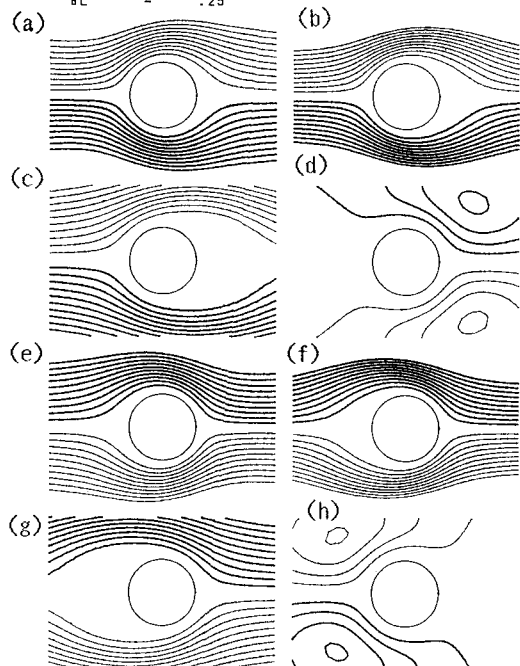
DS NAME = A:\TT2
dL = 2



RUN 4' 流れ関数 ψ

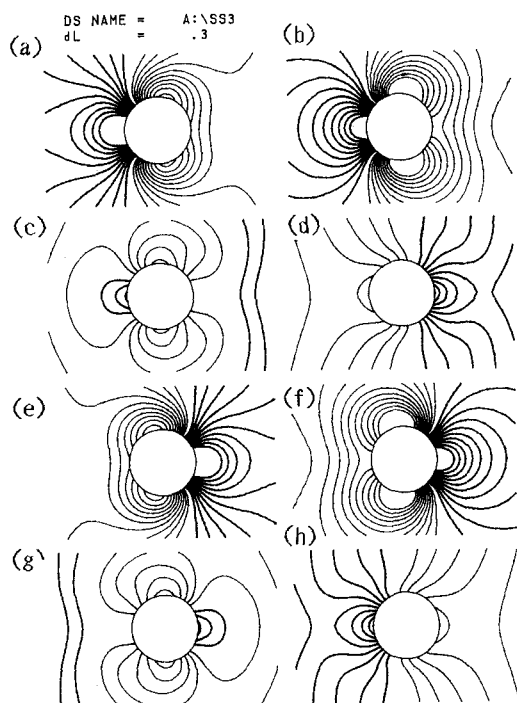
図-4

DS NAME = A:\002
dL = .25



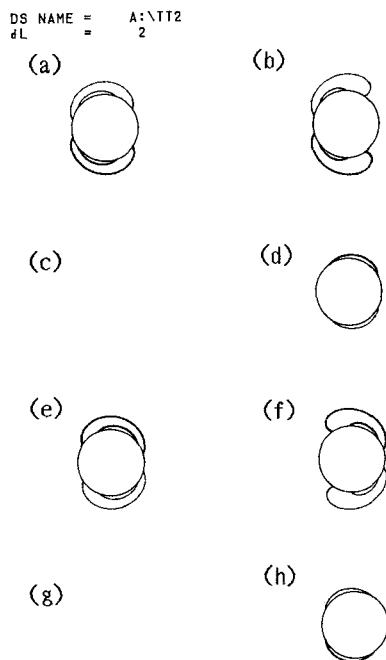
RUN 4' 压力P

図-5



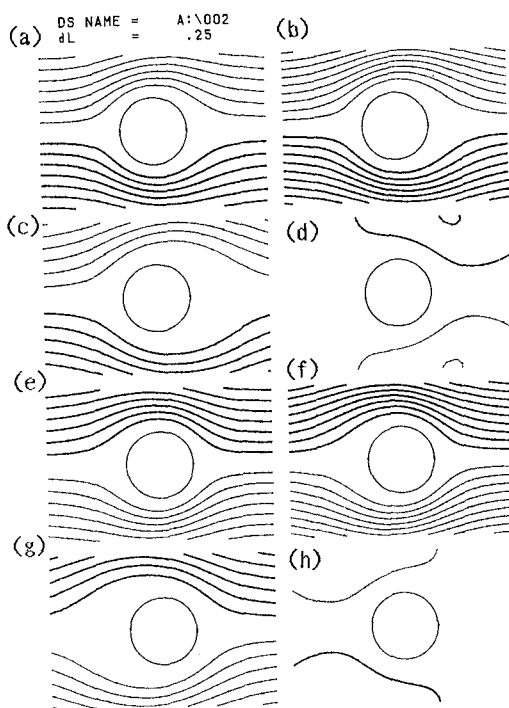
RUN Q 渦度 ω

図-6



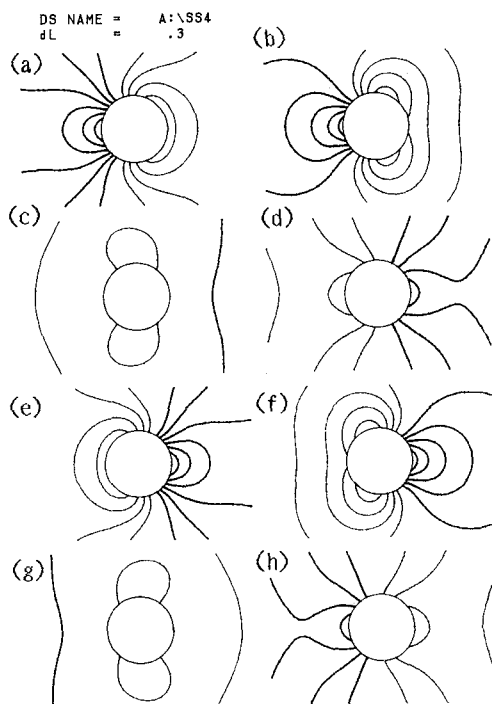
RUN Q 流れ関数 ψ

図-7



RUN Q 压力P

図-8



III. 剝離を伴わないポテンシャル流の場合

複素ポテンシャル W を $W = U_m \sin \sigma t (z + \frac{R_0^2}{z})$ とおくと、外側振動流は $u = U_m \sin \sigma t$ で

U_m はその最大流速、 R_0 は円柱の半径である。いま、 $z = R_0 e^r e^{i\theta}$ とおくと、

$$W = (U_m \sin \sigma t) R_0 [(e^r + e^{-r}) \cos \theta + (e^r - e^{-r}) \sin \theta] \quad (22)$$

となるから、速度ポテンシャルおよび流れ関数はそれぞれつぎようになる。

$$\phi = (U_m \sin \sigma t) R_0 (e^r + e^{-r}) \cos \theta, \quad \psi = (U_m \sin \sigma t) R_0 (e^r - e^{-r}) \sin \theta$$

また、水平および鉛直方向の速度成分はそれぞれ、 $u = \partial \phi / \partial x = (U_m \sin \sigma t) [1 - e^{-2r} (2 \cos^2 \theta - 1)]$,

$$v = -(U_m \sin \sigma t) (e^{-2r} \sin 2\theta) \quad (23)$$

つぎに、円柱のまわりの圧力 p はベルヌイの式を用いて、 $p/\rho = -\partial \phi / \partial t - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$ (24)

(静水圧分を除く) 式(24)に $\partial \phi / \partial t = (U_m \cos \sigma t) R_0 \sigma (e^r + e^{-r}) \cos \theta$ および $u^2 + v^2 =$

$(U_m \sin \sigma t)^2 [1 + e^{-4r} - 2e^{-2r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]$ の各式を代入すると、

$$p/\rho = -(U_m \cos \sigma t) R_0 \sigma (e^r + e^{-r}) \cos \theta - 0.5 (U_m \sin \sigma t)^2 [1 + e^{-4r} - 2e^{-2r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \quad (25)$$

式(25)は、円柱のまわりの圧力分布を与える式である。いま、式(25)を用いて、圧力分布のうち動水圧分の x 方向成分について、円柱のまわり 1 周について、合圧力 P を求めると、

$$P/\rho = (U_m \cos \sigma t) R_0 \sigma (e^r + e^{-r}) * \pi \quad (26)$$

を得る。式(25)を II で述べたと同様の無次元変数で書き表すと、 $P^* = P/\rho \sigma^2 R_0^2$, $U_m^* = U_m/\sigma R_0$, $t^* = \sigma t$, $r^* = r/R_0$, の関係を使用して、無次元圧力分布式および合圧力は、それぞれ

$$P^* = (U_m^* \cos t^*) (e^{r^*} + e^{-r^*}) * \cos \theta \quad \text{動水圧分のみ} \quad (27), \quad P^* = U_m^* \cos t^* (e^{r^*} + e^{-r^*}) * \pi \quad (28)$$

となる。さらに円柱表面の合圧力 P_0^* を考えると、 $r^* = 0$ において $P_0^* = 2\pi * U_m^* \cos(t^*)$ (29) を得る。

図-9 圧力のCONTOUR図 (ポテンシャル流)

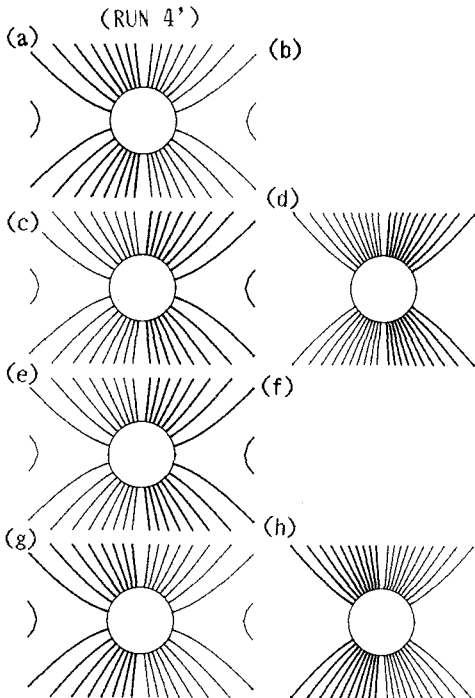
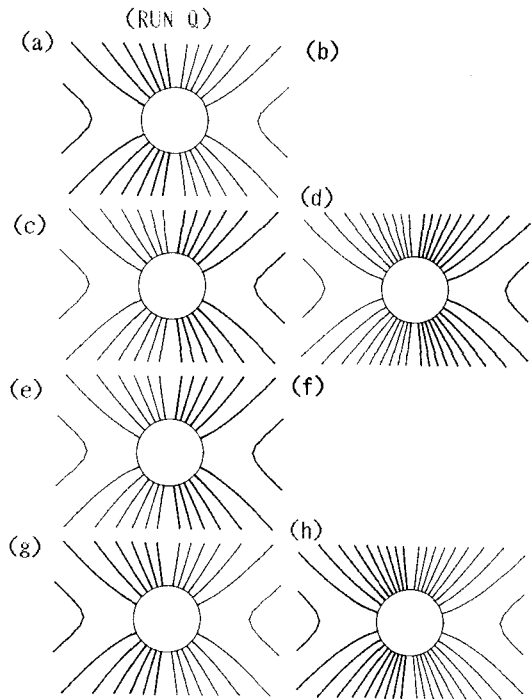


図-10 圧力のCONTOUR図 (ポテンシャル流)



ポテンシャル流の場合の円柱のまわりの圧力分布について、RUN 4' および Q と同じ水平振動流を与えて式 (27) により動水圧力のみを計算した値を圧力の Contour 図で示すと図-9、図-10となり、円柱の左右で対称的分布を示す。

ただし太線は正圧力で細線は負圧力を表す。RUN 4' に相当する図-9の方が RUN Q に相当した図-10に比べて Contour の本数も多く強い圧力場を示していると云える。また Contour 図が描かれていない箇所は、 $t=\pi/2$ ならびに $3\pi/2$ のときで水平振動流が正負の最大でありこのとき圧力場は 0 である。

つぎに、特に円柱表面上に働く圧力に関して、その x 方向圧力成分を円柱のまわり 1 周に渡って積分した合圧力 P_0 について調べてみる。剝離を伴う場合は II で述べた数値計算により得られた値を使用して求めることとした。また、ポテンシャル流の場合は式 (29) を使用して計算を行った。円柱表面上に働く水平圧力成分は水平方向に円柱を動かそうとする力となるから、その合圧力について見れば剝離を伴う場合と伴わない場合の力の

加わる様子を知ることが出来る。図-11は剝離を伴う場合で渦構造がやや複雑な場合の RUN 4' (◇印) と、同じ振動流の剝離のないポテンシャル流の場合の円柱表面上の合圧力を比較したものである。図から分かるように、合圧力の大きさには大差はなく同程度の値を示しているが、剝離を伴う RUN 4' (◇印) の方が、

$\pi/4$ 位相が遅れているのが分かる。すなわち、ポテンシャル流の場合、水平振動流が静止状態で合圧力は最大となり、水平振動流が最大るとき 0 である。これに対し、剝離を伴う場合は水平振動流が加速時 ($t=\pi/4$ 、または $5\pi/4$) のとき合圧力は最大となり、減速時 ($t=3\pi/4$ 、または $7\pi/4$) で 0 となっている。この事は、水平振動流が最大るとき渦生成が盛んに行われ、この渦の存在により圧力は 0 とはならないことによる。この様子は図-5の圧力場の Contour 図を見ると明確に分かる。図-12は水平振動流の振幅が小さい場合で剝離もわずかに起こる程度の場合であるが、図-11の場合と合圧力の値および位相差について同様の結果となっている。したがって、若干でも剝離を伴う場合はポテンシャル流と位相のズレが生じて来ると云える。今回の計算例では RUN 4' および Q の 2 つの例について比較を行ったが、今後はさらにストローハル数 S およびレイノルズ数 Re を種々変えて、剝離渦による流れが複雑となった場合についても計算を行いポテンシャル流との違いを明確にして行きたい。

＜ 参 考 文 献 ＞

浜中建一郎・勝岡洋一・佐藤幸雄； 円柱をよぎる振動流の数値解法、海洋開発論文集 Vol.8、1992

図-11 円柱表面の
水平方向合圧力

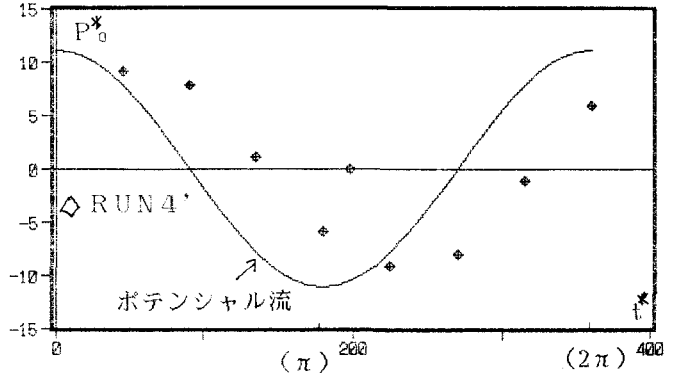


図-12 円柱表面の
水平方向合圧力

