

II-77

砂漣上の波による定常流

北海道大学大学院 学生員 渡部 靖憲

北海道大学工学部 正 員 浜中建一郎

1. はじめに

浅海域では、境界層内流れの2次の非線形性により平均流を発生させ、漂砂現象に密接な関係をもつ。さらに波動の影響によって底面に形成された砂漣上に適当な規模以上の波動運動が起きた場合、砂漣の前後に剥離渦を伴った複雑な流れとなり、境界層厚さも砂漣の波長程度まで発達すると考えられる。底面近傍で発生するこの前進平均流は、境界層内でfirst-orderの鉛直速度変動によって生じるReynolds stressの影響として現れ、底面が平らな平均流についてはLonguet-Higgins(1958)の解析解がある。また、砂漣上の循環定常流については層流状態の水平振動流場において解析解があるが、一方向平均流に関する報告はまだない。さらに、砂漣上に見られるような剥離を伴った準乱流状態では、この平均流を解析的に扱うのは困難である。

本研究は、この定常流の発生しない水平振動流場における砂漣上の底面付近の流れの時間的変化を波動場の空間的変化に置き換えることによりReynolds stress及び定常流を数値的に計算する手法を提案するものである。このとき、水平振動流における砂漣上の流れ(浜中ら, 1992)の数値計算を含めてこの定常流の数値解析を行い、Longuet-Higginsの解析解と比較すると同時に、剥離を伴う砂漣上の定常流についても考察を加えることとする。

2. 砂漣上の定常流と Reynolds stressの解析手法

2.1 基礎方程式

基礎方程式としてNavier-Stokes方程式を用いる。Navier-Stokes式のテンソル表示は次式で表される。

$$\frac{D v_i}{D t} = K_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで $p_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu e_{ik}$, $e_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}$, δ_{ik} ; Kroneckerのデルタ

(1)を書き直すと

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ v_{ik} + \frac{p}{\rho} \delta_{ik} - \nu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

上式右辺は{ }内のベクトルの発散を表している。

2.2 等角写像

砂漣底面の形に適合するように次のような写像関数を用いて写像する。

$$x = \xi - a e^{-\eta} \sin k \xi$$

$$y = \eta + a e^{-\eta} \cos k \xi$$

ここで x, y は物理座標系の横縦軸、 a は砂漣の振幅である。砂漣底面は $\eta = 0$ 線上に写像される。またこのときのJacobianは

$$J = 1 - 2a e^{-\eta} \cos k \xi + a^2 e^{-2\eta}$$

2.3 定常流に関する偏微分方程式の誘導

粘性の影響を無視できる境界層外縁($\eta = \infty$)と任意の高さ $\eta = \text{const.}$ とではさまれる領域を考え、境界を S ($S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$) とし、(2)を V で積分するとガウスの定理から次式が得られる。

Steady Flow under Wave Motion on Sand Ripples

by Yasunori Watanabe, Ken-ichiro Hamanaka

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = - \int_S \left(u v_n + \frac{p}{\rho} (x \cdot n) \right) dS + \int_S \left(\nu \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) dS \quad \cdots \cdots (3)$$

ただし、 $i=1$ として x 軸にとり、 $v_i=u$ とし、また n を境界上の外向き法線とする。 $\delta_{xn}=x \cdot n$ 。また一周期間にわたって時間平均をとると

$$\int_S \left(\nu \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) dS = \int_S \left(\overline{u v_n} + \frac{p}{\rho} (x \cdot n) \right) dS \quad \cdots \cdots (4)$$

今、流れは周期的であり、最初の近似として圧力は波の一周期間において正負対象に変化すると考えられ、(4)式から圧力項が消える。同様に流れの周期性を考えると、境界 S_2 上では n は x の負の向き、 S_4 上では x の正の向きに $\eta = \text{const.}$ 線に接しており、一周期間内では S_2 と S_4 上で位相差はあっても同じ流れが発生すると考えることができ、(4)式はさらに単純化される。

$$\int_{S_1+S_3} \left(\nu \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) dS = \int_{S_1+S_3} \overline{(u v_n)} dS \quad \cdots \cdots (5)$$

次に $\eta = \infty$ 線(S_1 上)は、ほぼ x 軸と一致し、 x と n は直交しているから $\partial v_n / \partial x = \partial u / \partial n = 0$ とおける。こうして整理すると次式のようになる。

$$- \int_{S_3} \left(\nu \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right) dS = \int_{S_1} \overline{(u v_n)}_{\infty} dS - \int_{S_3} \overline{(u v_n)} dS \quad \cdots \cdots (6)$$

砂漣上の振動流において、一対の定常循環流が発生することが知られている。(6)式の一方向定常流は、この循環流と一方向定常流を合わせたものであり、これらの区別を考える必要がある。

$\eta = \text{const.}$ 線に沿って $\bar{v}$ が流れると仮定すると、循環流は u が奇関数、 v が偶関数であり、一方向定常流は、 u が偶関数、 v が奇関数であると考えられる。ここで循環流は、最初の近似として対称形をなすとしてよいから、その対称点において正負逆となり(6)式の積分上で打ち消され、(6)式の左辺で残るのは一方向定常流だけである。

一方向定常流 U は $\eta = \text{const.}$ 線に沿って流れるという仮定から法線方向定常流速 $U_n=0$ となり

$$\int_{S_3} \nu \frac{\partial U_x}{\partial n} dS = \int_{S_3} \overline{(u v_n)} dS - \int_{S_1} \overline{(u v_n)}_{\infty} dS \quad \cdots \cdots (7)$$

また、幾何学的関係から s 軸と n 軸を ξ η 系に直すと

$$dS = J^{1/2} d\xi, \quad dn = J^{1/2} d\eta \quad \text{および} \quad U_x = \frac{dx}{ds} U_s = J^{1/2} \frac{\partial x}{\partial \xi} U_s \quad \text{となる。}$$

さらに ξ 軸に沿って流れる一方向定常流 U_s の ξ 軸間の流量 U_0 は一定であると考え、 $U_0(\eta) = J^{1/2} U_s = \text{const.}$ (その流管の太さ; $J^{1/2}$)とおける。最終的に次式が導かれる。

$$A \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \eta} + B U_0 = \int_{S_3} \overline{(u v_n)} dS - \int_{S_1} \overline{(u v_n)}_{\infty} dS \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\text{ここで} \quad A = \nu \int_{S_3} J^{-1} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi$$

$$B = \nu \int_{S_3} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J^{-1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi$$

2.4 Reynolds stressの評価

水平振動流で発生する流れの場合、Reynolds stressは循環流を発生させるだけであり、その時間変化は変化せず、砂漣一波長の積分((8)式右辺)は0となる。しかし、波動場では、水面波の波長の規模で変化しているため連続式を満

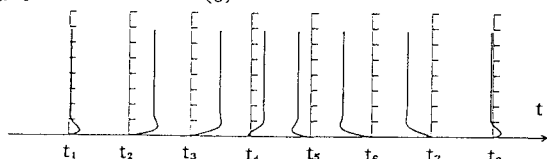


Fig. 2.1 Crest 上の水平流速 u の時間変化

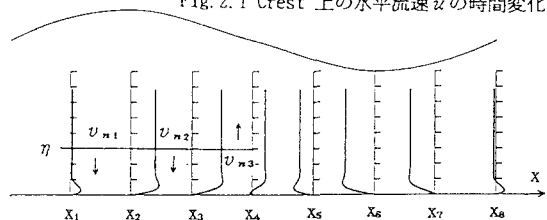


Fig. 2.2 水面波一波長の各点の水平流速 u

たすように v_n に僅かの変化を起こさせ、Reynolds stressの積分に値を持たせる。

水平振動流による砂漣上の流れ(1992, 浜中ら)の数値解(水平流速 u)を用い、砂漣のcrest上(S_2 断面)をよぎる一周期分の水平流速分布を考える(Fig. 2. 1)。水平流速の時間的变化を一次近似として空間的变化に対応すると考える(Fig. 2. 2)。Fig. 2. 2において隣り合う計算点で u を底面から適当な高さ η まで積分した流量の違いは連続式を満たすために新たな v_n' を発生させていると考えられる。この v_n' を含めた v_n を数値的に求めることでReynolds stressを算定することができる。

3. 数値解析法

定常流量の算定にあたっては有限差分法を用いた。このとき、底面近傍では流速が急激に変化するため次の関数を用いて底面付近のメッシュを細かくした。

$$\eta = \eta_{\max} \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (b; \text{ゆがみの程度, } 0 < \zeta < 1)$$

差分は中央差分を用いた。またReynolds stressの項において、砂漣一波長に比べ十分に小さいので v_n' は砂漣一波長について一定であると評価した。係数の積分については数値積分で算定した。

4. 解析解との比較

波動場における平らな底面に発生するReynolds stress及び定常流の平均流速についてはLonguet-Higginsの解析解がある。本研究で用いた手法の妥当性を検証するため、これらの解析解と比較する必要がある。平らな底面において比較するため、プログラム上では砂漣の振幅を0(Jacobianを1)とすることによって計算される。次に比較を行うLonguet-Higginsの解析解をあげる。

① u の rotational part u' ($u = \partial\phi/\partial x + u'$)

$$u' = -\sigma a e^{-\beta\eta} \operatorname{cosech} kh \cos(\chi + \beta\eta)$$

ここで σ ; 振動数, a ; 振幅, h ; 水深, k ; 波数, ν ; 動粘性係数

$$\chi = kx - \sigma t, \quad \beta = (\sigma/2\nu)^{1/2}$$

② u' を底面から積分した流量 Q

$$Q = \frac{\sigma a}{2\beta} \operatorname{cosech} kh \{ e^{-\beta\eta} [\cos(\chi + \beta\eta) - \sin(\chi + \beta\eta)] + \sin\chi - \cos\chi \}$$

③ v' ($v = \partial\phi/\partial y + v'$)

$$v' = 2^{-1/2} \sigma a R_w^{-1/2} \operatorname{cosech} kh \{ e^{-\beta\eta} [\cos(\chi + \beta\eta) + \sin(\chi + \beta\eta)] - \sin\chi - \cos\chi \}$$

ここで $R_w = \sigma/\nu k^2$; Wave Reynolds Number

④ Reynolds stress(時間平均)

$$\overline{uv} = \frac{\sigma^2 a^2 k}{4\beta \sinh^2 kh} \{ 2\beta\eta e^{-\beta\eta} \sin\beta\eta - 1 + 2e^{-\beta\eta} \cos\beta\eta - e^{-2\beta\eta} \}$$

⑤ 定常流平均流速

$$U = \frac{\sigma a^2 k}{4\sinh^2 kh} \{ 3 - 2(\beta\eta + 2)e^{-\beta\eta} \cos\beta\eta - 2(\beta\eta - 1)e^{-\beta\eta} \sin\beta\eta + e^{-2\beta\eta} \}$$

Fig. 4. 1は、水平方向流速 u ($\partial\phi/\partial x + u'$)の解析解(太線)と数値解(細線)とを表している。ここで(A)～(H)は一波長を8分割して並べたもので、それぞれ $i/8L$ ($i=1\sim 8$)の点を示す。 u' を底面から積分した流量 Q (Fig. 4. 2)では、解析解と数値解との間に若干の差がみられる。各高さにおいて厳密に定常状態に達していない結果が積算されたものと思われるが、(A)～(H)点で相対的に同じ差であるため、さらに Q の差をとることで得られた v_n' の値には反映されず、Fig. 4. 3では解析解とよく一致している。また、Reynolds stress及び定常流速(Fig. 5. 4)も解析解とほぼ一致しており、本研究で提案するこの数値的手法は底面境界層内の流れを知るうえで有効な方法と言える。

5. 砂漣上の定常流

Fig. 5.1~Fig. 5.3は、砂漣をもつ底面の u , Q , v_n' をFig. 4.1~Fig. 4.3にならって表したものである。ここで想定した砂漣は $a/\lambda=0.1$ (a :砂漣の振幅, λ :砂漣の波長)。また、同様に細線は数値解、太線は解析解である。

底面近傍で砂漣によって発生したと思われる乱れによって僅かに水平流速 u に変化が起きているのが分かる(Fig. 5.1)。Fig. 5.1では平らな底面の解析解とさほど差が見られなかった u であるが、相対的な流量では大きな差が生じており(Fig. 5.2)それによってReynolds stressの原因となる v_n' の値に影響を与え、複雑に変化させている。Fig. 5.4に a/λ がそれぞれ0(平らな底面), 0.1, 0.3の数値解及びLonguet-Higginsの解析解を示した。 a/λ が大きくなると剥離を伴った乱れが生じReynolds stressの絶対値を増大させ、複雑にする。またその結果として、定常流速の絶対値を増大させる。平らな底面の定常流速と比べ $a/\lambda=0.3$ の流速及び境界層厚さが2倍以上増大することは興味のある結果である。

6. 結論

- ・振動流の時間的流速分布を波動場の空間的流速分布に置き換える方法により、砂漣上の剥離を伴った複雑な流れにおける定常流を数値的に得ることができた。
- ・底面において流れに大きな乱れがある場合、強い定常流が発生することが予想され、漂砂問題に関して重要だと思われる。

【参考文献】

- 1) 浜中建一郎, 佐藤幸雄, 砂漣上の振動流境界層, 海岸工学論文集, 1992
- 2) O. M. PILLIPS, THE DYNAMICS OF THE UPPER OCEAN REYNOLDS STRESS STEADY FLOW

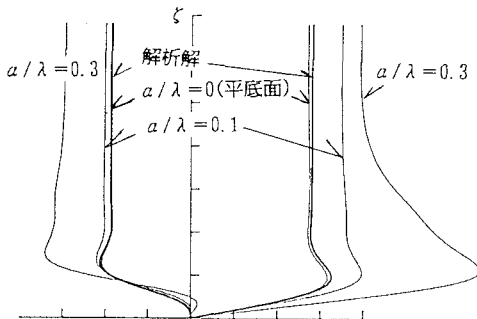


Fig. 5.4 Reynolds stress と 定常流

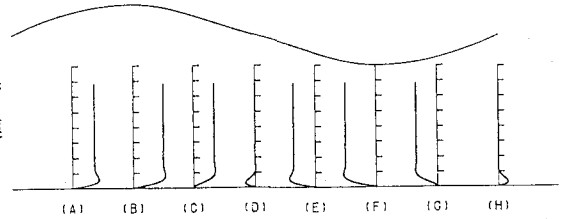


Fig. 4.1 水平流速 u の分布(平底面)

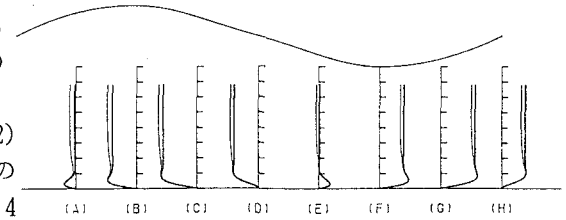


Fig. 4.2 流量 Q の分布(平底面)

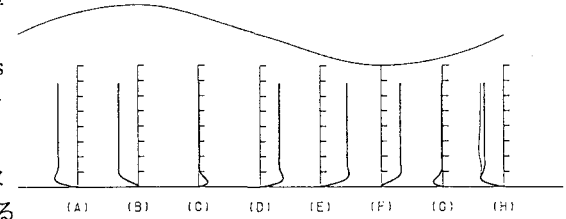


Fig. 4.3 v_n' の分布(平底面)

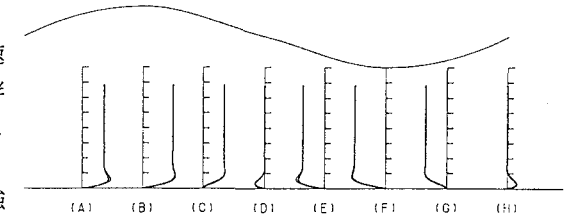


Fig. 5.1 水平流速 u の分布(砂漣底面)

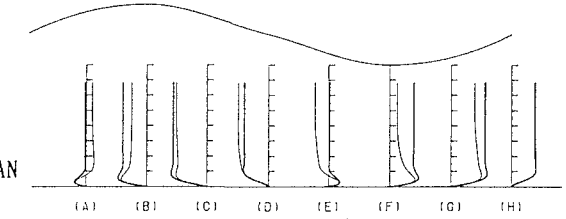


Fig. 5.2 流量 Q の分布(砂漣底面)

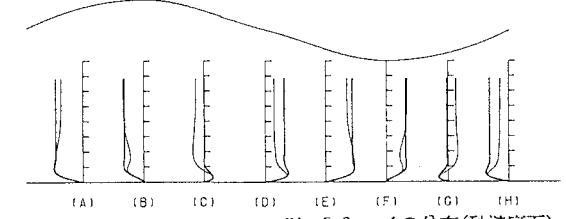


Fig. 5.3 v_n' の分布(砂漣底面)