

II-74

砂漣上の振動流のエネルギー損失

北海道大学工学部 学生員 成嶋 晋一

北海道大学工学部 正 員 浜中建一郎

1. まえがき

著者等はこれまで砂漣上を進行する波による底面境界層の流れの特性を調べるために、砂漣上の水平振動流の数値解析を試み、砂漣上の境界層内の剥離や大きな渦構造が再現されることを確かめてきた(Hamanaka And Sato:1992, 浜中, 佐藤:1992)。一方波は進行に伴って、流体の粘性によってその運動エネルギーを失う。このエネルギー損失はポテンシャル流速場におけるものと、底面境界層の剪断流速場に於けるものに大別され、深海域に於いては前者が、浅海域に於いては後者が卓越する。本研究では特に後者を取り上げる。しかしながら、底面が平らな場合は波動境界層の解析解が存在するためそれによるエネルギー損失を見積もる事は簡単であるが、剥離を伴った砂漣上の境界層には解析解はまだ見つかっていない。このことから本研究では、砂漣上の振動流の数値解析を用いてそこのエネルギー損失を求め、砂漣の規模や剥離構造とエネルギー損失の関係を調べることを目的とする。

2. 粘性流体中のエネルギー損失

基礎方程式としてNavier-Stokesの式を用いて、2次元粘性流体中のエネルギー損失を考えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

(νは動粘性係数 ρは流体の密度) (1)

上式は全ての流速の場所変化によって起こる力のやりとりを全部考慮にしている。しかし上式の粘性項のうち

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

従って、(1)は、

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \nabla V = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 V \quad \text{..... (2)}$$

となり、これは(1)の形で書いたときの(1)の上の式の中の(∂u/∂x)と(∂v/∂x)で生じる応力は打ち消し合い、また(1)の下式の中の(∂u/∂y)と(∂v/∂y)から生じる応力も打ち消し合うことを意味する。

一方、運動エネルギーの時間変化を求めると

$$Et = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} |V|^2 \right) = \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial t}$$

この式に(1)式を代入し、連続の式を用いて整理すると

$$\begin{aligned} Et = -\nabla \left(\rho V \left(\frac{|V|^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) - \mu V \sigma_{ik} \right) \\ - 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad \text{..... (3)} \end{aligned}$$

Energy loss of oscillatory flow over ripples

by Shinichi Narushima and Ken-ichiro Hamanaka

(ここで μ は粘性率 $\sigma_{ik} = \partial v_i / \partial x_k + \partial v_k / \partial x_i$)

となる。すなわち、(3)式の $-\mu V \sigma_{ik}$ の項は(2)式の粘性力とその力の方向の移動距離をかけて仕事を表し、(2)式を考えた時打ち消し合った項達は仕事を考えたとき打ち消し合わず残ることになる。

又、(3)式の最後の項は常に負であり、運動エネルギーを減じる効果をもち、粘性によって生じるエネルギー損失を表す。このエネルギー損失を流れ関数 ϕ を用いて表すと次式のようにになる。

$$\Phi = -4\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 - \mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^2 \quad \dots\dots (4)$$

3. 水平床上的ポテンシャル波動場と境界層内のエネルギー損失

底面から十分離れた場所については微小振幅波理論が成り立ち、流れはポテンシャル流れに支配されるとする。このとき速度ポテンシャル ϕ は、

$$\phi = a\sigma \frac{\cosh ky}{k \sinh kh} \sin(kx - \sigma t), \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \dots\dots (5)$$

ここで、 a は波の振幅で h は水深で底面は $y=0$ である。これらを用いて底面から水面までの一周期当たりのエネルギー損失を求めると、

$$E_p = \int_0^H \int_0^T \Phi \, dy dt = -\mu \frac{A^2 T}{k} \sinh 2kh, \quad A = \left(\frac{a k \sigma}{\sinh kh} \right) \quad \dots\dots (6)$$

次に境界層内のエネルギー損失だが、底面が平の場合は(2)式のNavier-Stokesの式に鉛直方向流速 $v=0$ と連続の式を用いると容易に水平方向流速分布が求まるのでエネルギー損失も解析的に求ることができる。このとき、境界条件は底面の流速は0境界層外ではポテンシャル流速場に依存するので次のようになる。

$$y=0 : u=0, \quad y=\infty : u=U_0 \sin \sigma t \quad (U_0 = a\sigma / \sinh kh)$$

これらによって求められた流速 u は

$$u = U_0 \beta \exp(-\beta y) (\sin(\sigma t - \beta y) - \sin(\sigma t - \beta y)) \quad , \quad \beta = (\sigma/2\nu)^{1/2} \quad \dots\dots (7)$$

よってエネルギー損失は

$$\Phi = -\mu \beta^2 \exp(-2\beta y) U_0 (1 + \sin(\sigma t - \beta y))$$

又、一周期当たりのエネルギー損失は

$$E_n = \int_0^\infty \int_0^T \Phi \, dy dt = \frac{\mu \beta}{2} U_0^2 T \quad \dots\dots (8)$$

となる。ここで、 $R = E_n / E_p$ という比を考えた時 $R > 1$ なら境界層内の、 $R < 1$ ならポテンシャル波動場のエネルギー損失が他方を卓越する事を意味する。

$$R = \frac{E_n}{E_p} = \frac{(\sigma/2\nu)^{1/2}}{2k \sinh 2kh} \quad \dots\dots (9)$$

4. 砂漣上のエネルギー損失

先に述べたように底面が平らな場合と違い、剥離を伴う砂漣上の解析解はまだ求められていない。故に、数値解析法を用いてこのエネルギー損失を求める。

まず計算座標だが流れの解析においては底面に沿う直交曲線座標系を用いると都合がよい。今、底面の形を余弦と仮定しているので次のような等角写像を用いるとする。

$$x = \xi - \lambda \exp(-\eta) \sin \xi \\ y = \eta + \lambda \exp(-\eta) \cos \xi$$

ここで、 λ は砂漣の振幅を表し、 $\eta=0$ の時 y は、底面を表す。

また、先ほど流れ関数 ϕ で (x, y) 座標系で表されたエネルギー損失を (ξ, η) 座標系で表すため座標変換を行う。このとき写像関数 J は次式で表せる。

$$J = (\partial x / \partial \xi) (\partial y / \partial \eta) - (\partial y / \partial \xi) (\partial x / \partial \eta) = 1 - 2\lambda \exp(-\eta) + \lambda^2 \exp(-2\eta)$$

次に計算方法としては、 ξ, η 軸双方に有限差分を行うとする。このとき底面近傍では流れの様相が急激に変化するので差分メッシュを細かくする必要がある。そのため、次のような関数を用いて η から ξ へ座標変換を行う。

$$\eta = \eta_{\tau} \frac{\exp(b\xi) - 1}{\exp(b) - 1} \quad (b \text{ はゆがみのパラメーター、} \eta_{\tau} \text{ は } \eta \text{ の最大値})$$

また、底面でのエネルギー損失は次の式で与える。 $(\phi_1$ は底面より一つ上のメッシュの流れ関数)

$$\Phi = \mu \left(\frac{1}{J} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^2 \frac{2\phi_1}{(\Delta \xi)^2} \right)^2$$

このように計算されたエネルギー損失は (ξ, η) というゆがめられた座標上の各点のものでありこれを (x, y) の各点に対応させるには、面積影響を考慮して積分変換を行わなければならない。この積分変換は次式のようにになる。

$$\iint \Phi(x, y) dx dy = \iint \Phi(\xi, \eta) \frac{\eta_{\tau}}{\exp(b)-1} \exp(b\xi) J d\xi d\eta$$

5. 計算結果および考察

計算するにあたって (8) 式で書かれた R 曲線を求める以外は全ての変量を有次元量 σ', ρ', k' で無次元化をおこない計算した。(ダッシュは有次元量を表す。)

また、使用した流れ関数は Hamanaka, Sato:1992, 浜中, 佐藤:1992 と同じ手法で求めた。なお、図はそれぞれ左上右上左下右下の順に一周期を 8 分割した時の $T=2\pi*1/8, 2\pi*2/8, 2\pi*3/8, 2\pi*4/8$ である。

図 1 は (7) の解析解と砂漣の振幅を 0 として求めた流れ関数を使用した数値解で得られる流速分布の比較図である。縦軸は η 横軸は u である。ここで $\nu=0.05, U_0=5, \eta=5$ で細線が解析解、太破線が数値解である。双方ともほぼ一致している。このことより数値解は妥当であり、以後の計算に使用してもさしさわりのないと言える。図 2 は無次元エネルギー損失の CONTOUR で、(1), (2), (3), の順に ν が小さくなっている。(1) は ν が大きく剥離も小さいので底面に沿って比較的一様にエネルギー損失が起きている。しかし、(2), (3) は (1) よりも ν が小さいので大きな剥離が起き、そのため CONTOUR は乱れて、剥離が起きる所で大きなエネルギー損失が生じている。また、(1), (2), (3) とともに流速が最大になる $2\pi*2/8$ でエネルギー損失が全断面に発達しているのがわかる。図 3 は η 方向の砂漣一波長分の無次元エネルギー損失の分布である。縦軸は η 、横軸は無次元エネルギー損失量である。(1), (2), (3) は図 2 の (1), (2), (3) に対応し、図中の太線は数値解で細線は図 1 で求めた流速を使用した解析解である。(1) が底面で大きな無次元エネルギー損失を起こしているのに対し、(2), (3) は底面ではそれ程ではないが η 方向に幅広く無次元エネルギー損失を起こしている。これはエネルギー損失が (1) では底面での流速変化による剪断流で (2), (3) では剥離による剪断流で生ずるからだと考えられる。図 4 は (9) 式の R のグラフで分散関係式を使い有次元の周期と水深で表したものである。この図からある特定の周期の波にとって境界層内でのエネルギー損失が卓越し始める水深が分かる。

以上、砂漣上の振動流境界層内のエネルギー損失について述べてきた。以上の結果から実際の波動場でのエネルギー損失を論じるには波の緒元を与えると同時に、上のエネルギー損失の水深方向の積分と一周期平均を求める必要があり今後の課題である。

参考文献

- Hamanaka, K. and Sato, Y. (1992) : Quasi-turbulent boundary layer of oscillating flow over ripples, I. C. C. E. 92, Abstract, p231-232
 浜中建一郎, 佐藤幸雄 (1992) : 砂漣上の振動流境界層, 海岸工学論文集, 第39巻 (1), 1-5頁

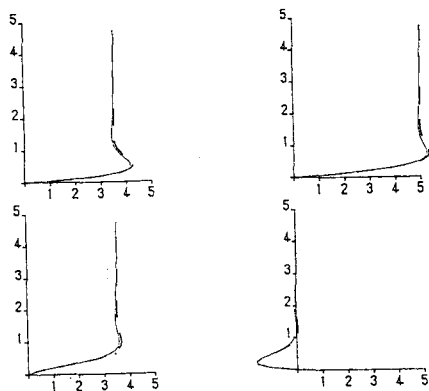


図1 流速分布図

(1)



(2)



(3)

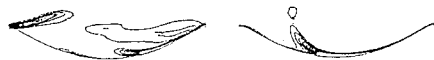
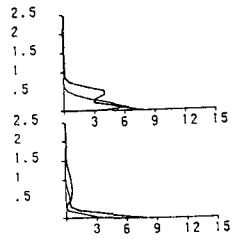
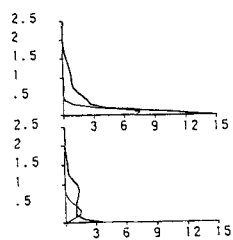
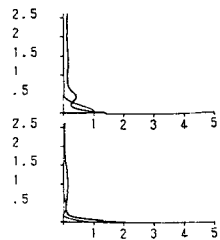
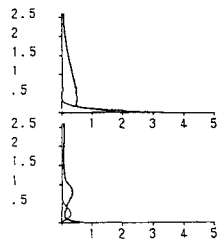


図2 CONTOUR

(1)



(2)



(3)

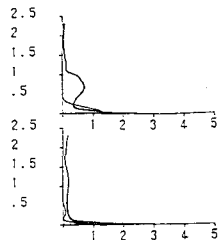
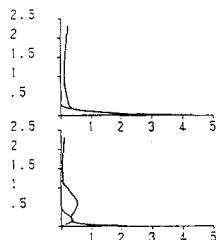


図3 エネルギー損失分布

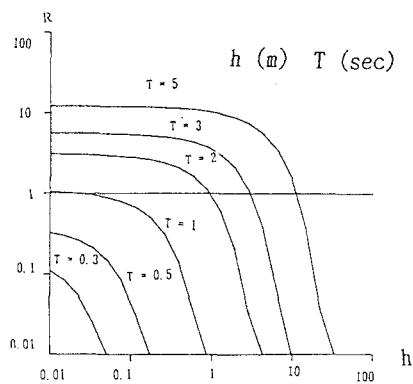


図4 Rグラフ