

## II-58

## 重力を考慮したリング水の保水効果

北見工業大学 正員 中尾隆志

北海道大学 正員 藤田睦博

## 1. はじめに

近年、環境問題が大きくクローズアップされるなかで、工業用廃液の地下地盤内への侵入や農業に代表される化学物質の土壌内残留による地下水汚染もまた大きな社会問題となっている。他方、水文学の分野においても水質を用いた河川流出成分の分離や土壌内に滞留している旧水と降雨による新水の流出を個別に解析する場合が少なくない。これらの現象を調べる際には浸透現象を微視的に取り扱った解析が必要となる。昨年の報告において著者らは等球径からなる土粒子モデルを考え、2つの土粒子が完全に接触している場合、土粒子間の接触部分で水の表面張力によりサクションが生じ、保水効果があることを指摘し、このサクションの大きさは土粒子の径の大小により大きく変化し、さらにサクションによる保水効果は土壌内浸透の時間遅れに大きな影響を与える<sup>1)</sup>ことを示した。また、等球粒子間の間隙の違いはリング水と大気の圧力差に大きな変化をもたらす<sup>2)</sup>ことを指摘した。さらに、理論を異球径モデルにまで拡張し等球径モデルの場合と同様なリング水の保水効果の影響について述べている<sup>3)</sup>。しかし、いずれのモデルの構築に際しても、リング水の断面形状は一定の半径を持つ円弧と仮定しているため、保水されたリング水による重力効果は考慮してはいない。本報告では、異球径からなる土粒子間に生ずるリング水に重力効果を考慮し、2つの土粒子の粒径比およびリング水による保水量がサクションにどのような影響を与えるのか考察を行ったので報告する。

## 2. 表面張力のラプラス式

図-1はそれぞれ $R_1$ ,  $R_2$ の半径からなる2つの異球径によって構成される土粒子が $\delta$ の距離にあり、その接合部においてリング水が生じている場合の断面を表している。今、リング水の曲率半径として気体側(外側)を負として $r_1$ 、リング水の内部の曲率半径を正として $r_2$ とし、水と空気との表面張力を $\sigma$ 、また土粒子と水の接触角を $\theta$ とすると水( $P_w$ )と大気( $P_a$ )の圧力差は式(1)に示される表面張力のラプラスの式<sup>4)</sup>で与えられる。

$$P_w - P_a = \sigma \left( -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots\dots (1)$$

2つの土粒子の中心が鉛直軸上にあるような土粒子が縦に並ぶ場合、リング水の断面形状は鉛直軸に対し、対称な形状となる。すなわち図-1に示すように2つの土粒子の中心を通るようにZ軸を選び、リング水が下部の土粒子と接触する点をZ軸の原点とすると、リング水の断面形状は高さZと軸からの距離rとの関数で表すことができる。換言すればリング水面の任意

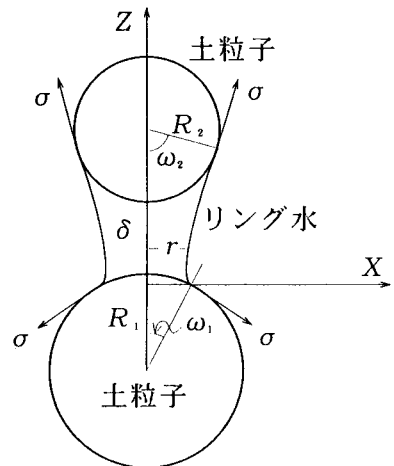


図-1 座標系と記号

Effect of Water Retention Volume of Pendular Ring between Two Spheres with Differnt Radii  
Considering Gravity.

by Takashi NAKAO and Mutsuhiro FUJITA.

の点の高さ  $Z$  は  $Z$  軸からの距離  $r$  のみの関数として表し得ることになる。このような場合、 $Z$  軸より  $r$  だけの距離にある任意の点における曲率半径  $r_1, r_2$  は

$$r_1 = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2Z}{dr^2}}, \quad r_2 = \frac{r \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2}}{\frac{dZ}{dr}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる<sup>6)</sup>。また、 $P_w - P_a$  をあらためて  $P$  とおき、下部の土粒子及び上部の土粒子とリング水の各接点における圧力をそれぞれ  $P_0, P_1$  とし、これらの点での  $Z$  軸となす角を  $\omega_1, \omega_2$  とすると 2 点間の圧力差は次式で与えられる。

$$P_0 - P_1 = \rho g l \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\rho g$ : リング水の単位体積重量、 $l$ : リング水の下部土粒子の接点から上部土粒子の接点までの距離 ( $= R_1(1 - \cos \omega_1) + R_2(1 - \cos \omega_2) + \delta$ )、 $\delta$ : 土粒子間の距離

式(3)はリング水内部の圧力分布が  $Z$  軸方向に対し静水圧分布的に変化していることを示している。このことより、式(1)は式(2)を考慮して、

$$-\frac{\frac{d^2Z}{dr^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{dZ}{dr}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dr}\right)^2}} = \frac{1}{\sigma} (P_0 - \rho g Z) \quad \dots\dots\dots (4)$$

となり、リング水の断面形状を求めるには式(4)を解けばよい。

### 3. リング水による保水量とサクションの関係

ところで、リング水による保水量  $V_w$  が決まると  $\omega_1, \omega_2$  の取り得る範囲が決定される。リング水に作用する力は下部及び上部の接点での表面張力による力とリング水の重さであるから、力の釣り合いを考えると

$$2\pi R_2 \sigma \sin \omega_2 - 2\pi R_1 \sigma \sin \omega_1 = \rho g V_w \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。今、下部の土粒子の半径  $R_1$  を基準とし、 $R_2$  を  $R_1$  の比で表して無次元化し、 $V_w$  を  $\omega_1, \omega_2$  で整理すると式(5)は次式のように書き改められる。

$$\frac{\rho g V_w}{2\pi \sigma R_1} = R \sin \omega_2 - \sin \omega_1 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $R = \frac{R_2}{R_1}$  (粒径比)

上式は  $R_1, R$  及び  $V_w$  が決まると  $\omega_1, \omega_2$  の関係が決定されることを示している。 $\omega_1, \omega_2$  の取り得る範囲は  $0 \leq \omega_1 \leq 90^\circ, 0 \leq \omega_2 \leq 90^\circ$  であるから式(6)の右辺の最大値は  $\omega_1 = 0, \omega_2 = 90^\circ$  の場合となり、 $V_w$  の範囲は  $V_w \leq \frac{2\pi \sigma}{\rho g} R_1 R$  となる。

図-2, 図-3 は  $V_w$  の最大値  $V_{max} (= \frac{2\pi \sigma}{\rho g} R_1 R)$  に対し、それぞれ  $V_{max}$  の 0.1, 0.5 倍の保水量の場合における粒径比  $R$  が 0.1, 0.5, 1 (等球径), 3, 10 のとき、式(6)より得られる  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の関係を示している。

いずれの場合においても  $R$  が 1 よりも小さな時には  $R$  が大きくなると、 $\omega_1$  のとり得る範囲は大となっているが  $90^\circ$  には達しない。また、いずれも  $R$  が小さなほど  $\omega_1$  の増加に対し、 $\omega_2$  の増加の割合が大となっている。さらに、このときには  $V_w$  が小さな図-2 の場合の方が、 $V_w$  が大となる図-3 の場合よりも  $\omega_1, \omega_2$  の範囲が大きくなっている。これに対し、両者とも  $R > 1$  の場合には  $\omega_1$  の範囲は 0 から  $90^\circ$  までの全

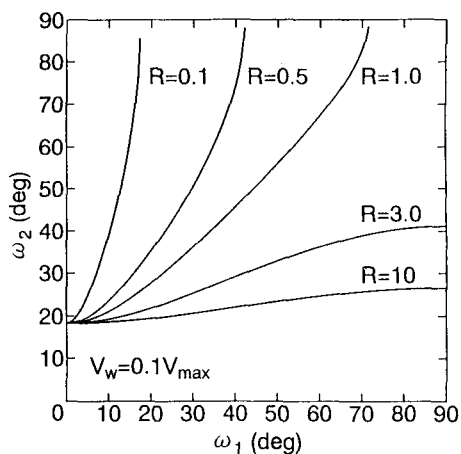


図-2  $\omega_1$ と $\omega_2$ の関係( $V_w=0.1V_{max}$ の場合)

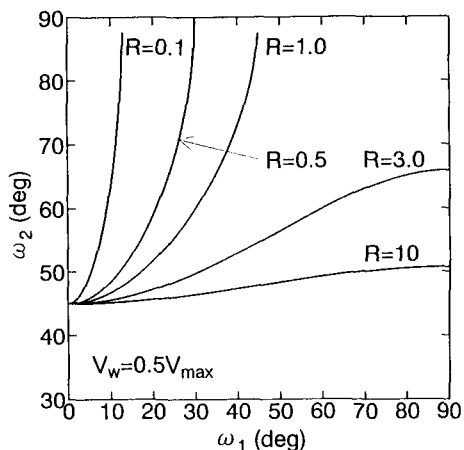


図-3  $\omega_1$ と $\omega_2$ の関係( $V_w=0.5V_{max}$ の場合)

ての範囲をとるが逆に $\omega_2$ のとり得る範囲は小さくなり、また $V_w$ が小さなほど $\omega_2$ の範囲は小さくなる。

さて、上部土粒子とリング水の接触部分に作用する圧力 $P_1$ がリング水の全重量を支えているので力の釣り合いより次式を得る。

$$-P_1 \pi R_1^2 s i n^2 \omega_2 = \rho g V_w \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)と式(3)より、

$$P_0 = \rho g R_1 \{1 - \cos \omega_1 + R(1 - \cos \omega_2) + \Delta\} - \frac{\rho g V_w}{\pi R_1^2 R^2 s i n^2 \omega_2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\Delta$ : $R$ と同様に $R_1$ を基準とし、 $\delta$ を $R_1$ の比で表した無次元量である。

従って、下部土粒子とリング水の接触部分における圧力 $P_0$ は $R_1$ 、 $R$ 、 $V_w$ が決定すると式(6)より、 $\omega_1$ 、 $\omega_2$ の関係が決まり、式(8)から求めることができる。

図-4、図-5は先の場合と同様に $V_{max}$ の0.1、0.5倍の保水量の時、 $R_1=0.5\text{mm}$ 、 $\Delta=0$ (完全接触)の場合の $P_0$ と $\omega_1$ の関係を $R$ をパラメータとして示している。いずれの場合においても $R \leq 1$ の時、計算が途中で終了しているがこれは先に述べたように $R$ により $\omega_1$ のとり得る範囲が限定されるためである。また、

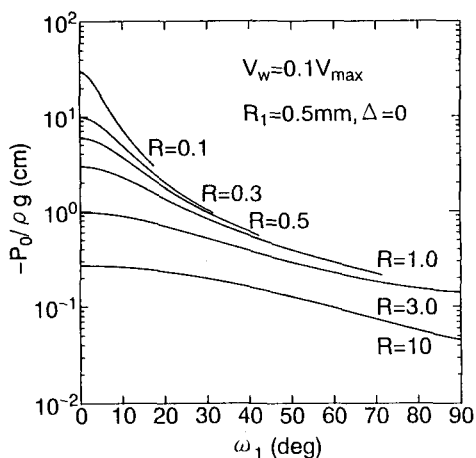


図-4  $\omega_1$ と $P_0$ の関係( $V_w=0.1V_{max}$ の場合)  
( $R_1=0.5\text{mm}$ ,  $\Delta=0$ )

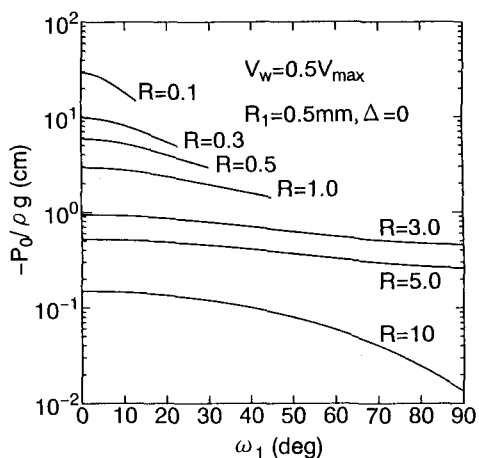


図-5  $\omega_1$ と $P_0$ の関係( $V_w=0.5V_{max}$ の場合)  
( $R_1=0.5\text{mm}$ ,  $\Delta=0$ )

両者とも同一の $\omega_1$ に対しては $R$ が大になるとサクシオンは小となっている。さらに、図-5に比べ、 $V_w$ が小さな図-4の場合の方が同一の $R$ に対し $\omega_1$ が増加すると急激にサクシオンが減少することがわかる。

図-6は $R_1=0.5\text{mm}$ ,  $R=1$ (等球径),  $\Delta=0$ (完全接触)としたとき、 $V_w$ をパラメータとし、それぞれ $V_{\max}$ の0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5倍とした場合の $\omega_1$ と $P_0$ の関係を示している。 $V_w$ にかかわらず、いずれの場合においても $\omega_1$ の増加とともに $P_0$ の値は急激に0に近づいていることがわかる。特に、 $V_w=0.01V_{\max}$ の場合、 $\omega_1 \geq 55.3^\circ$ では $P_0$ は正となり、リング水は形成しないことがわかる。また、 $V_w$ が小さいほどサクシオンの低下率は大きくなっている。

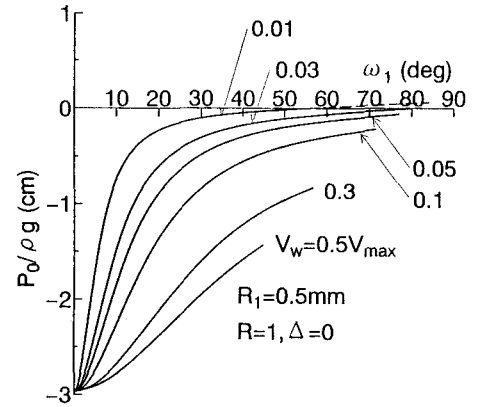


図-6  $\omega_1$ と $P_0$ の関係( $R=1$ , 等球径)  
( $R_1=0.5\text{mm}$ ,  $\Delta=0$ )

#### 4. まとめ

本研究ではリング水に重力効果を考慮した場合におけるリング水内部のサクシオンの変化を求めることを最終目的とし、最初に、リング水に作用する力の釣り合い式より、 $R_1$ ,  $R$ およびリング水の保水量 $V_w$ が決定した場合の $\omega_1$ ,  $\omega_2$ の範囲を $R$ をパラメータとして求め、その結果 $\omega_1$ ,  $\omega_2$ の範囲は $R$ により大きく影響されることを示した。また、リング水内部の圧力変化は静水圧的に変化するものと考え、リング水底部の圧力 $P_0$ と $\omega_1$ の関係を $R$ および $V_w$ のパラメータとしてあらわした。

土粒子と土粒子間の幾何学的形状が $R_1$ ,  $R$ および $\Delta$ で与えられ、リング水の保水量 $V_w$ が決定するとリング水が静的に釣り合っている場合にはただ一組の $\omega_1$ ,  $\omega_2$ が得られ、式(4)よりリング水の水面形状が求められる。現段階では $\omega_1$ ,  $\omega_2$ を確定する方法がなく、今後さらに詳細に $R_1$ ,  $R$ および $V_w$ と $\omega_1$ ,  $\omega_2$ の関係を検討する必要がある。

土層内の土粒子の分布構造は本報告で述べた場合のようにその配置が $Z$ 軸方向(重力方向)だけではなく、重力方向に対し様々な傾きを持っている。この場合のリング水の断面形状はリング水に対する重力効果のため土粒子間を結ぶ軸に対して、対称な形とはならず、本報告で用いた方法をそのまま適用することは難しい。著者らはこの問題についても現在、研究中であり上記で述べた問題点を考慮して以後、研究を進める予定である。

謝辞 本研究は平成4年度・文部省科学研究費・一般研究(C)「粒子モデルを用いた不飽和浸透流の微視的解析」(代表:中尾隆志)の助成のもとに行われた研究の成果の一部である。ここに記して感謝の意を表す。

#### 《参考文献》

- 1) 中尾隆志、藤田睦博: 等球粒子モデルを用いた不飽和浸透流の微視的解析、土木学会北海道支部論文報告集、第48号、pp. 569~574, 1992.
- 2) 中尾隆志、藤田睦博: 等球粒子モデル法によるリング水の保水効果に関する研究、土木学会第47回年講集2、pp. 564~565, 1992.
- 3) 中尾隆志、藤田睦博: 異球径粒子モデルを用いた土壌内水分の保水効果に関する研究、水文・水資源学会研究発表会要旨集、pp. 130~133, 1992.
- 4) 例えば、小野 周: 表面張力、物理学 One Point 9, 共立出版, 1980.
- 5) 寺澤寛一: 自然科学者のための数学概論(増訂版)、pp. 32~66, 岩波書店.