

II-57

球形土粒子の空隙分布の解析

北海道大学 正 員 藤田 睦博

北見工業大学 正 員 中尾 隆志

北海道大学 学生員 西村 貴之

1. はじめに

山腹斜面内における雨水の流れを、不飽和浸透流として解析しようする場合、 θ (体積含水率) $\sim \phi$ (サクシヨン)あるいは K (不飽和透水係数) $\sim \theta$ の関係式を与えなければならない。現段階では、これらの関係式を実験的に求めざるを得ない。

本研究では、まず、 θ (体積含水率) $\sim \phi$ (サクシヨン) の関係を理論的に求めることを目的としている。実在の土粒子は複雑な形状をしており、理論的取扱いを簡単にするために、球形土粒子を想定する。

2. 粒子間のリング水

球形粒子間のサクシヨンにより保持されるリング水については、中尾・藤田¹⁾らの研究がある。これによると不飽和時において土粒子の接合部では、水の表面張力によりサクシヨンが発生し、水の一部はリング水として保水される。図-1に示すように土粒子として半径 R_1 、 R_2 からなる2つの球を考え、2球が δ の距離にあるものとする。リング水の曲率半径を r_1 、 r_2 とし水と空気の水の表面張力を σ 、また土粒子と水の接触角を θ とすると水 (P_w)と大気 (P_a)の圧力差は式(2.1)に示される。表面張力のラプラスの式で与えられる曲率半径 r_1 、 r_2 は図-1を参考にし、平面三角の性質より式(2.2)、(2.3)となる。

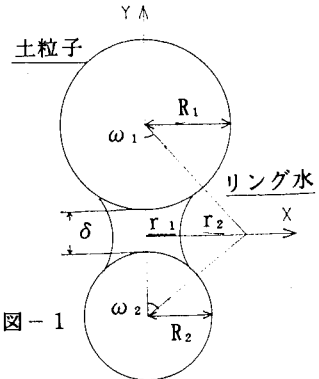


図-1

$$P_w - P_a = \sigma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.1)$$

$$r_1 = R_1 \sin \omega_1 + r_2 (\sin \omega_1 - 1) \quad (2.2)$$

$$r_2 = \frac{(R_1 + \delta)(R_1 + R_2 + \delta) + R_1 \{R_1 - 2(R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1\}}{2\{(R_2 - R_1) + (R_1 + R_2 + \delta) \cos \omega_1\}} \quad (2.3)$$

またサクシヨンによる保水量は次式で与えられる。

$$V_w = \pi r_2 [(A^2 + r_2^2)(\cos \omega_1 + \cos \omega_2) - A r_2 \{\sin \phi \cdot \cos(\omega_1 - \omega_2) + \pi - \phi\}]$$

$$- \frac{\pi}{3} \{r_2^3 (\cos^3 \omega_1 + \cos^3 \omega_2) + R_1^3 (1 - \cos \omega_1)^2 (2 + \cos \omega_1) + R_2^3 (1 - \cos \omega_2)^2 (2 + \cos \omega_2)\} \quad (2.4)$$

式(2.2)、(2.3)よりリング水を形成する ω_1 の範囲は

$$\cos(\omega_1) > \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2 + 2\Delta} \quad (2.5)$$

$$\frac{\alpha \beta - \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \Delta \beta \{R_1(\alpha + \beta) + \Delta \beta\}}}{R_1(\alpha + \beta) + \Delta \beta} \leq \tan \frac{\beta}{2} \leq \frac{\alpha \beta + \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \Delta \beta \{R_1(\alpha + \beta) + \Delta \beta\}}}{R_1(\alpha + \beta) + \Delta \beta} \quad (2.6)$$

$$\alpha = L_1 + \Delta, \quad \beta = L_2 + \Delta$$

probabilistic characteristics for void in soil composed of spherocal particles.

By MUTSUHIRO FUJITA, TAKASHI NAKAO, TAKAYUKI NISHIMURA

3. 土粒子の間の空隙の確率特性

粒子半径Rの確率密度関数をN(R)とすると、粒子1個の体積Vの確率密度関数は式(3.1)で与えられる。

$$F_1(V) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{2}{3}} V^{-\frac{2}{3}} N \left\{ \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \right\} \quad (3.1)$$

つぎに、この粒子を任意の大きさの体積 V_u に空隙率 λ で充填したとき、X個の粒子が充填される確率密度関数を求めてみよう。X個の粒子の体積の和を T_x とする

$$T_x = \sum_{i=1}^X V_i \quad (3.2)$$

Xの数が大きいと、中心極限定理により T_x は正規分布に漸近する。よって、 T_x の確率密度関数を $F_2(T_x)$ とみると、式(3.3)のようになる。

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{T_x}} \exp \left\{ -\frac{(T_x - \overline{T_x})^2}{2\sigma_{T_x}^2} \right\} \quad (3.3)$$

ここに、 $\overline{T_x}$: T_x の期待値 σ_{T_x} : T_x の標準偏差

$\overline{T_x}$, σ_{T_x} は、式(3.2)を考慮すると、式(3.4)のようになる。

$$\overline{T_x} = x \overline{V}, \quad \sigma_{T_x}^2 = x \sigma_V^2 \quad (3.4)$$

式(3.4)を式(3.3)に代入して、次式を得る。

$$\therefore F_2(T_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \sigma_V} \exp \left\{ -\frac{(T_x - x \overline{V})^2}{2x \sigma_V^2} \right\} \quad (3.5)$$

任意の大きさの空間 V_u を考え、空間内にX個の粒子があるとする。空隙率を λ とすると、次の関係式が成立している。

$$T_x = V_u(1 - \lambda) \quad (3.6)$$

式(3.6)を満たす粒子数Xの確率密度関数を $F_3(X)$ とみると、

$$F_3(X) dX = F_2(T_x) dT_x = F_2\{V_u(1 - \lambda)\} dT_x \quad (3.7)$$

したがって、 $F_3(X)$ として次式を得る。

$$F_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \sigma_V} \exp \left\{ -\frac{\{\overline{V}x - V_u(1 - \lambda)\}^2}{2x \sigma_V^2} \right\} \frac{dT_x}{dx} \quad (3.8)$$

$F_3(X)$ を厳密に定義するには、 dT_x/dX を与えなければならない。

この関係式を式(3.9)で代用する。

$$\frac{dT_x}{dx} = \frac{d}{dx} (V_1 + V_2 + \dots + V_x) = \frac{d}{dx} (\overline{V}x) = \overline{V} \quad (3.9)$$

最終的には、次のようになる。

$$F_3(x) = \frac{\overline{V}}{\sqrt{2\pi x} \sigma_V} \exp \left\{ -\frac{\{\overline{V}x - V_u(1 - \lambda)\}^2}{2x \sigma_V^2} \right\} \quad (3.10)$$

式(3.9)を代用した近似度を吟味するために、矩形粒径分布を使用したシュミレーションをおこなった。図-3.1は採用した矩形粒径分布を示している。計算は、図-3.1を満たす粒子半径Rを計算機上で発生させ、式(3.11)を満足するXを求める。

$$T_x = \sum_{i=1}^x \frac{4}{3} \pi R_i^3 \quad (3.11)$$

この計算を繰り返しXのヒストグラム、平均、分散等を求め得られた結果と式(3.10)と比較する手法を

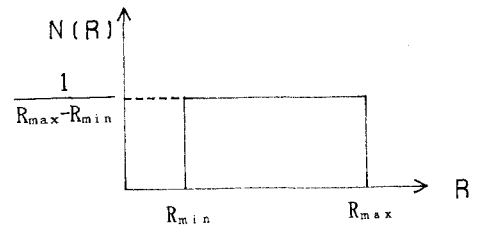


図-3.1

採用した。計算では、 $T_x=2332\text{cm}^3$ とした。また、図-3.1に粒径分布が与えられているので V, σ_v を計算できる。この場合、つぎようになる。

$$\sigma_v = \int v^2 F1(v) dv - (\bar{v})^2 \quad V = \int v F1(v) dv \quad (3.12)$$

図-3.2は、数値実験の結果と式(3.10)を比較したものであるが、式(3.9)の近似度は充分であることがわかる。

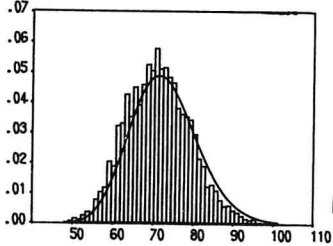


図-3.2

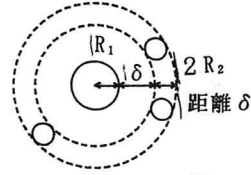


図-3.3

次に、粒子間の空隙の確率構造を調べるために、図-3.3のように半径 R_1 の粒子を中心として、その周囲に図のように半径 R_2 の粒子が y 個存在する状態を考える。体積 $\frac{4}{3}\pi(R_1+\delta)^3$

の空間に粒子 R_1 が1個のみ存在し、その周りの空間

$$\frac{4}{3}\pi(R_1+\delta+2R_2)^3 - \frac{4}{3}\pi(R_1+\delta)^3 \quad (3.13)$$

に粒子 R_2 が y 個存在する状態は、 R_1 と R_2 の粒子の組み合わせが生じる結合確率密度関数 $N(R_1, R_2) = N(R_1)N(R_2)$ なので、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left\{-\frac{\left\{\bar{V}-\frac{4}{3}\pi(R_1+\delta)^3(1-\lambda)\right\}^2}{2\sigma_v^2}\right\} \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}y\sigma_v} \\ & \times \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}y\sigma_v} \exp\left\{-\frac{\left[\bar{V}y-\frac{4}{3}\pi\{(R_1+\delta+2R_2)^3-(R_1+\delta)^3\}(1-\lambda)\right]^2}{2y\sigma_v^2}\right\} yN(R_1)N(R_2) \quad (3.14) \end{aligned}$$

ここで、式(2.4)を $V_w(R_1, R_2, \delta, w)$ と記述する。 R_1, R_2 は様々な値をとるので全体でのリング水の体積は、次のようになる。

$$\begin{aligned} w = & \iiint y V_w(R_1, R_2, \delta, w) \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} \exp\left\{-\frac{\left(\bar{V}-\frac{4}{3}\pi(R_1+\delta)^3(1-\lambda)\right)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}y\sigma_v} \\ & \times \frac{\bar{V}}{\sqrt{2\pi}y\sigma_v} \exp\left\{-\frac{\left[\bar{V}y-\frac{4}{3}\pi\{(R_1+\delta+2R_2)^3-(R_1+\delta)^3\}(1-\lambda)\right]^2}{2y\sigma_v^2}\right\} N(R_1)N(R_2) dR_1 dR_2 dy \quad (3.15) \end{aligned}$$

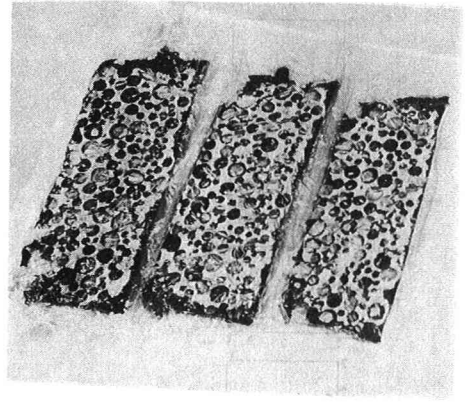


写真-4.1

4. ビーズ玉による実験

実際に球形粒子により構成される空隙の構造を確認するために、次のような実験を行った。縦28cm, 横20cm, 高さ10cmの箱にビーズ玉を敷き詰める。ビーズ玉は、径7mm(R_1), 10mm(R_2), 15mm(R_3)の3種類を用い、それぞれ1500個、700個、300個使用した。このときの体積から、空隙率 λ を計算すると $\lambda=0.443$ を得た。

次に、この中にアスファルト乳剤を流し込み、その状態で放置しておくとおよそ1日で供試体が固まる。その供試体をダイヤモンドカッターを用いて4mm厚さでスライスする。ガラスビーズの最小径は、7mmなので4mm厚さの断面の中に埋もれることはない。隣合った2枚の断面層から、ガラスビーズ玉の位置、径が得られる。この2枚を1つの断面群とする。今回の実験では1つの断面から得られたガラスビーズは約20~30個である。これを7つの断面群で測定した。写真-4.1は、スライスされた供試体の断面を示している。測定は、写真に示すような断面上のビーズ玉の痕跡をデジタイザーでコンピューターに入力し、隣合った断面の情報から各ビーズ玉の径、球の中心の座標を求めた。

実験では、3種類の直径のビーズ玉を用いているので、互いに隣合う二つのビーズ玉の直径は、(R_1, R_1), (R_1, R_2), (R_1, R_3), (R_2, R_2), (R_2, R_3), (R_3, R_3)の6通り組み合わせがある。これら6通り組み合わせごとに2つの粒子間の距離 δ のヒストグラムを求め、これを図-4.1に示している。

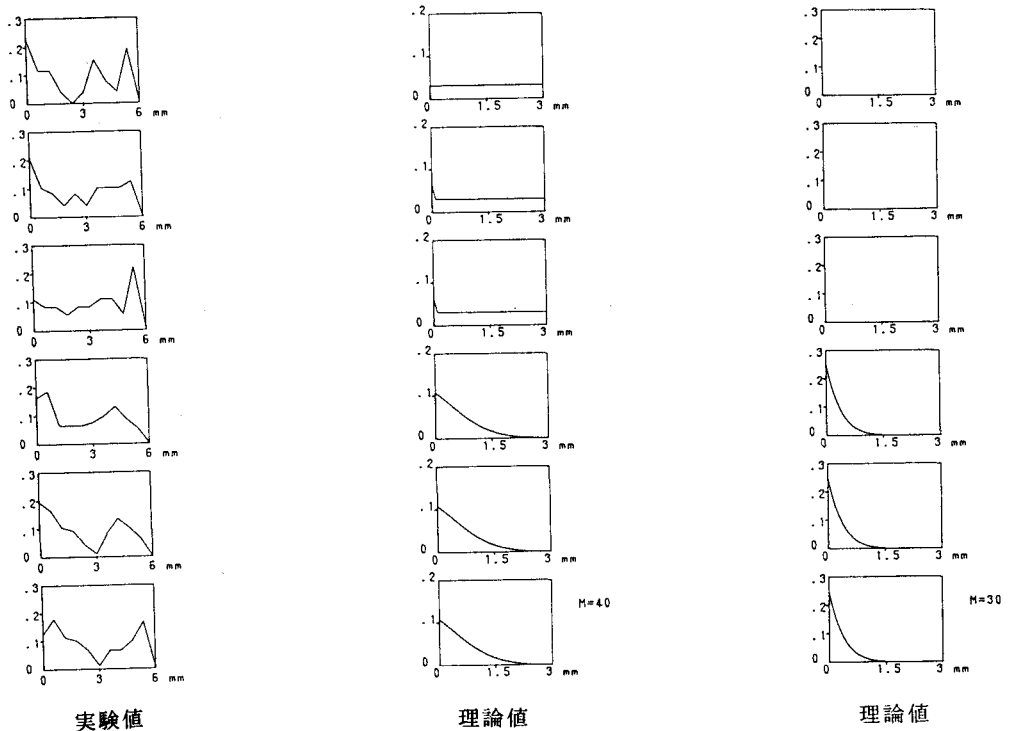


図-4.1

謝辞：本研究は文部省科学研究 一般研究(B)、(代表者、藤田睦博)の補助を受けたものである。関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) 中尾隆志・藤田睦博;異球径粒子モデルを用いた土壌内の保水効果に関する研究, 水文・水資源学会1992年研究発表会要旨集, 130~133, 1992