II－33

統計学的微分方程式としての貯留関数法

北海道大学　正員　藤田 睦博
日本国土開発(株)　正員　工藤 睦信
北海道大学工学部　学生員　篠原 伸和

1. はじめに

流域に対し入力される降雨量が不規則関数であると考えるならば、出力である流出量も不規則関数である。降雨量の確率特性が既知のときの流出量の確率分布を求めるために、不規則過程がMarkov過程である場合については、Fokker-Planck方程式を解くことによって確率分布を求めることができる。著者らは貯留型流出モデルにおける流出量の1～4次モーメントを理論的に求める手法を提案してきた[1]。ここでは降雨量の1～4次モーメントが既知という条件下で、降雨量が時刻毎に変化するということを考慮にいれて、流出量の1～4次モーメントを考える。

2. 基礎理論

一般的な貯留型流出モデルは、次式で与えられる。

$$\frac{dS}{dt}=r-q \quad (2.1) \qquad S=Kq^{P} \quad (2.2)$$

S：貯留量(mm)，q：流出量(mm/hr)，r：降雨強度(mm/hr)

降雨量r(t)が不規則関数ならば、q,Sもまた不規則関数となる。

2.1 線形系(P=1)

この場合、流出量q(t)を容易に計算できて、式(2.3)で与えられる。

$$q(t)=\exp\left\{-\frac{1}{K}t\right\}\int_0^t \frac{1}{K}r(\tau)\exp\left\{\frac{1}{K}\tau\right\}d\tau \tag{2.3}$$

$r(\tau)$を互いに独立な不規則関数とし、その統計量を以下のように定義する。

$$E\{r(\tau)\}=\overline{r},\quad E\{(r(\tau_1)-\overline{r})(r(\tau_2)-\overline{r})\}=\sigma_r{}^2\delta(\tau_1-\tau_2) \tag{2.4}$$

$\delta(\tau)$:デルタ関数, $\sigma_r{}^2$:rの分散

$$E\{(r(\tau)-\overline{r})^3\}=\mu_{r3},\quad E\{(r(\tau)-\overline{r})^4\}=\mu_{r4}$$

式(2.3)の両辺の期待値をとると、

$$E\{q(t)\}=\exp\left\{-\frac{1}{K}t\right\}\int\frac{1}{K}E\{r(\tau)\}\exp\left\{\frac{1}{K}\tau\right\}d\tau=\overline{r}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{K}t\right\}\right) \tag{2.5}$$

2,3,4次モーメントの導出に関して、$\overline{r}=0$ としても一般性を失わない。

$$\sigma_q{}^2=E\{q(t)^2\}=\frac{C}{2K}\sigma_r{}^2\left(1-\exp\left\{-\frac{2}{K}t\right\}\right) \tag{2.6}$$

式(2.6)の係数Cは、時間の次元をもつ定数である。これはデルタ関数を積分することにより生じると考える。すなわち、式(2.6)において、$\sigma_q{}^2$、$\sigma_r{}^2$は同一の次元をもっており、貯留係数は時定数に相当しており時間の次元をもっているので、両辺の次元を揃えるための係数Cを定義する必要がある。次にq(t)の3、4次モーメントμ_{q3}、μ_{q4}を求める。

Statistical Differential Equation for Storage Function Model
by Mutsuhiro FUJITA, Mutsunobu KUDO and Nobukazu SHINOHARA

$$\mu_{q3}=E\{q(t)^3\}$$
$$=\exp\left\{-\frac{3}{K}t\right\}\iiint\frac{1}{K^3}E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}\exp\left\{\frac{1}{K}(\tau_1+\tau_2+\tau_3)\right\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{2.7}$$

$$E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}=\begin{cases}\mu_{r3} & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau \\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau,\ \tau_3\neq\tau \\ 0 & \tau_1\neq\tau_2\neq\tau_3\end{cases} \tag{2.8}$$

したがって、式(2.7)を次のように書くことができる。

$$\mu_{q3}=\exp\left\{-\frac{3}{K}t\right\}\int\frac{C^2}{K^3}\mu_{r3}\exp\left\{\frac{3\tau}{K}\right\}d\tau=\frac{C^2}{3K^2}\mu_{r3}\left(1-\exp\left\{-\frac{3}{K}t\right\}\right) \tag{2.9}$$

μ_{q4}は、以下のように定義されるので式(2.11)を考慮して式(2.12)を得る。

$$\mu_{q4}=E\{q(t)^4\}=\exp\left\{-\frac{4}{K}t\right\}\iiiint\frac{1}{K^4}E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)r(\tau_4)\}$$
$$\times\exp\left\{\frac{1}{K}(\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4)\right\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \tag{2.10}$$

$$E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)r(\tau_4)\}=\begin{cases}0 & \tau_1\neq\tau_2\neq\tau_3\neq\tau_4 \\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau,\ \ \tau_4\neq\tau \\ \mu_{r4} & \tau_1=\tau_2=\tau_3=\tau_4=\tau \\ \sigma_r^4 & \tau_1=\tau_2=\tau,\ \ \tau_3=\tau_4\neq\tau \\ 0 & \tau_1=\tau_2=\tau,\ \ \tau_3\neq\tau_4\neq\tau\end{cases} \tag{2.11}$$

$$\mu_{q4}=\frac{C^3}{4K^3}\mu_{r4}\left(1-\exp\left\{-\frac{4}{K}t\right\}\right)+\frac{C^2}{4K^2}3\sigma_r^4\left(1-\exp\left\{-\frac{2}{K}t\right\}\right)^2-\frac{C^3}{4K^3}3\sigma_r^4\left(1-\exp\left\{-\frac{4}{K}t\right\}\right) \tag{2.12}$$

r(t)が正規性の不規則関数のとき、$\mu_{r3}=0$, $\mu_{r4}=3\sigma_r^4$を式(2.9), (2.12)に代入すると

$$\mu_{q3}=0,\qquad \frac{\mu_{q4}}{\sigma_q^4}=3 \tag{2.13}$$

P=1のとき、流出量q(t)は式(2.3)に示されているように降雨量r(τ)の重み付き和で与えられるので、正規分布の再生性よりも式(2.13)の結果は明らかである。

2.2 非線形系(P≠1)

P≠1になると式(2.2)のq^Pの項がネックとなり、前節に説明した手法を利用できない。式(2.1), (2.2)を貯留量Sに関する式に書き改める。

$$\frac{dS}{dt}+\left(\frac{1}{k}\right)^{(1/p)}S^{(1/p)}=r \tag{2.14}$$

r, q, sを平均値と平均値からの偏差で表す。

$$\begin{aligned} r(t)&=\overline{r}(t)+\widetilde{r}(t) \qquad & E\{\widetilde{r}(t)\}&=0 \\ q(t)&=\overline{q}(t)+\widetilde{q}(t) & E\{\widetilde{q}(t)\}&=0 \\ S(t)&=\overline{S}(t)+\widetilde{S}(t) & E\{\widetilde{S}(t)\}&=0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

一方、Brasら[2]はベキ乗型の確率変数$S^{(1/P)}$に関して次式を提案している。

$$S^{(1/P)}=\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S} \tag{2.16}$$

$$\alpha=\overline{S}^{(m-1)}\left\{1+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E\{\widetilde{S}^2\}}{\overline{S}^2}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E\{\widetilde{S}^3\}}{\overline{S}^3}+\cdots\right\} \tag{2.17}$$

$$\beta=\frac{\overline{S}^m}{E\{\widetilde{S}^2\}}\left\{m\frac{E\{\widetilde{S}^2\}}{\overline{S}}+\frac{1}{2}m(m-1)\frac{E\{\widetilde{S}^3\}}{\overline{S}^2}+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)\frac{E\{\widetilde{S}^4\}}{\overline{S}^3}+\cdots\right\} \tag{2.18}$$

ただし、m=1/P

式(2.15),(2.16)を式(2.14)に代入して次式を得る。

$$\frac{d(\overline{S}+\widetilde{S})}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)(\alpha\overline{S}+\beta\widetilde{S})=\overline{r}+\widetilde{r} \tag{2.19}$$

両辺の期待値をとると式(2.20)のようになり、式(2.19)から式(2.20)を引くと式(2.21)を得る。

$$\frac{d\overline{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S}=\overline{r} \tag{2.20}$$

$$\frac{d\widetilde{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\widetilde{S}=\widetilde{r} \tag{2.21}$$

βと$\widetilde{S}$の関係は式(2.18)に示すように期待値の演算子E{}を通じて結ばれている。従って、βと$\widetilde{S}$は厳密には独立ではないが、その従属性が極めて小さいものとして式(2.21)の解を求める。

$$\widetilde{S}=\exp\left\{-\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\int\widetilde{r}(\tau)\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau \tag{2.22}$$

式(2.22)が前節の式の(2.3)に相当しており、式(2.22)の両辺を2乗、3乗、4乗して期待値をとることにより$\widetilde{S}$に関する2,3,4次モーメントが得られる。流出量q(t)の1～4次モーメントは、次式より得られる。式(2.2)に式(2.16)を適用して

$$\overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S},\qquad \widetilde{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\widetilde{S} \tag{2.23}$$

$$E\{\widetilde{q}^2\}=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2E\{\widetilde{S}^2\},\ E\{\widetilde{q}^3\}=\left(\frac{1}{K}\right)^{3m}\beta^3E\{\widetilde{S}^3\},\ E\{\widetilde{q}^4\}=\left(\frac{1}{K}\right)^{4m}\beta^4E\{\widetilde{S}^4\} \tag{2.24}$$

ここでは、式(2.14)に示すように流出量qを消去して貯留量Sに関する基本式を採用し、得られたSのモーメントを式(2.24)を用いて、流出量のモーメントに置換している。貯留量を消去して流出量に関する式にすると次のようになり

$$K\frac{dq^p}{dt}+q=r \tag{2.25}$$

微分項に含まれているq^pに式(2.16)を適用せざるを得ない。α, βは式(2.17),(2.18)に示されるように時間の関数になっているので、$\frac{\partial d}{\partial t}$, $\frac{\partial\beta}{\partial t}$などの項が現れて式の展開が非常に複雑になる。式(2.22)の両辺を2乗して期待値をとると

$$\sigma_q^2(t)=E\{\widetilde{q}(t)^2\}=\exp\left\{-2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\iint E\{\widetilde{r}(\tau_1)\widetilde{r}(\tau_2)\}$$

$$\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_2\right\}d\tau_1\tau_2 \tag{2.26}$$

$r(\tau)$の統計量を式(2.4)と同一とすると次式を得る。

$$\sigma_q(t)^2=\exp\left\{-2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,dt\right\}\int\sigma_r{}^2C\exp\left\{2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\,d\tau_1\right\}d\tau \tag{2.27}$$

すなわち、式(2.27)は式(2.28)の微分方程式の解になっている。

$$\frac{d\sigma_s^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_s^2=C\sigma_r^2 \tag{2.28}$$

次に、式(2.22)の両辺を3乗して期待値をとる。

$$\mu_{s3}=\exp\left\{-3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta dt\right\}\iiint E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\}$$

$$\times\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_4+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_5+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_6\right\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{2.29}$$

式(2.8)の関係式を用いて3次モーメントを得る。

$$\mu_{s3}=\exp\left\{-3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta dt\right\}\int C^2\mu_{r3}\exp\left\{3\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_1\right\}d\tau \tag{2.30}$$

従って、μ_{s3}は次の微分方程式の解である。

$$\frac{d\mu_{s3}}{dt}+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{s3}=C^2\mu_{r3} \tag{2.31}$$

式(2.22)の両辺を4乗して期待値をとる。

$$\mu_{s4}=E\{\tilde{S}^4\}=\exp\left\{-4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta dt\right\}\iiiint E\{\tilde{r}(\tau_1)\tilde{r}(\tau_2)\tilde{r}(\tau_3)\tilde{r}(\tau_4)\}\times$$

$$\exp\left\{\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_5+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_6+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_7+\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_8\right\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 d\tau_4 \tag{2.32}$$

式(2.11)の関係を用いて、次式を得る。

$$\mu_{s4}=\exp\left\{-4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta dt\right\}\left[\int\mu_{r4}C^3\exp\left\{4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_1\right\}d\tau\right.$$

$$\left.+3\sigma_r^4C^2\left(\int\exp\left\{2\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_1\right\}d\tau\right)^2-3\sigma_r^4C^3\int\exp\left\{4\int\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta d\tau_2\right\}d\tau\right] \tag{2.33}$$

式(2.33)は、次の連立微分方程式の解になっている。

$$\frac{dz}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta z=6\sigma_r^4C^2 \qquad \frac{d\mu_{s4}}{dt}+4\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{s4}=(\mu_{r4}-3\sigma_r^4)C^3+z \tag{2.34}$$

これまで誘導した式を整理してまとめると次のようになる。

平均値 $$\frac{d\overline{S}}{dt}+\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S}=\overline{r} \qquad \overline{q}=\left(\frac{1}{K}\right)^m\alpha\overline{S} \tag{2.35}$$

分散 $$\frac{d\sigma_s^2}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\sigma_s^2=C\sigma_r^2 \qquad \sigma_q^2=\left(\frac{1}{K}\right)^{2m}\beta^2\sigma_s^2 \tag{2.36}$$

3次モーメント $$\frac{d\mu_{s3}}{dt}+3\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{s3}=C^2\mu_{r3} \qquad \mu_{q3}=\left(\frac{1}{K}\right)^{3m}\beta^3\mu_{s3} \tag{2.37}$$

4次モーメント $$\frac{dz}{dt}+2\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta z=6\sigma_r^4C^2$$

$$\frac{d\mu_{s4}}{dt}+4\left(\frac{1}{K}\right)^m\beta\mu_{s4}=(\mu_{r4}-3\sigma_r^4)C^3+z\ ,\quad \mu_{q4}=\left(\frac{1}{K}\right)^{4m}\beta^4\mu_{s4} \tag{2.38}$$

α, βは$\overline{S}$, σ_s^2, μ_{s3}の関数になっているので、式(2.35)～(2.38)を連立微分方程式として、貯留量Sの4次モーメントまでを計算できる。

3. シミュレーション法による検討

前節で誘導した貯留量の1～4次モーメントを求める基礎式は、いずれも降雨量r(t)を連続な不規則関数と定義している。多くの場合、降雨量の実測値は離散化された量である。降雨量の離散化過程は、式(3.1)に示

す不規則関数の積分と考えられる。

$$R(t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t} r(\tau)d\tau \tag{3.1}$$

ここでは、積分の操作を経た統計量には大文字のRの添え字、連続な不規則関数の統計量には小文字のrの添え字を付して区別する。式(3.1)の$r(\tau)$の統計量と$R(t)$のそれは、一般に異なっているので両者の関係は式(2.35)～(2.38)を利用するにあたって極めて重要である。$r(\tau)$の統計量として、式(2.4)を用いる。式(3.1)の両辺の期待値をとると式(3.2)となり、1次モーメントは不変である。

$$E\{R(t)\}=\frac{1}{\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t} E\{r(\tau)\}d\tau=\overline{r} \tag{3.2}$$

2次モーメント以上の計算において、$\overline{r}=0$ とおいても一般性を失わない。

$$\sigma_R{}^2=E\{R(t)^2\}=\frac{1}{\Delta t^2}\iint E\{r(\tau_1)r(\tau_2)\}d\tau_1 d\tau_2=\frac{1}{\Delta t}C\sigma_r{}^2 \tag{3.3}$$

3次モーメントは、式(2.8)を考慮して

$$\mu_{R3}=E\{R(t)^3\}=\frac{1}{\Delta t^3}\iiint E\{r(\tau_1)r(\tau_2)r(\tau_3)\}d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3=\frac{1}{\Delta t^2}C^2\mu_{r3} \tag{3.4}$$

4次モーメントは、式(2.11)を考慮すると式(3.5)になる。

$$\mu_{r4}=\frac{C^3}{\Delta t^3}\{\mu_{r4}-3\sigma_r{}^4\}+\frac{C^2}{\Delta t^2}3\sigma_r{}^4 \tag{3.5}$$

すなわち、1次モーメントを除いてシミュレーション法から得られる流出量$q(t)$の2～4次モーメントと式(2.35)～(2.38)で得られる理論解を比較するには、式(3.3)～(3.5)で求まる2～4次モーメントを式(2.35)～(2.38)に与えなければならない。計算は、式(2.1)の$r(t)$に乱数列を与え$q(t)$を時間刻みをΔtとする数値計算で求める。5000組標本$q_i(t)$, $i=1,2,\cdots,5000$の各時間毎に4次モーメントまでを計算した。図-3.1は、夕張岳の1988～1991年の雨量記録を用いて、T分間雨量の確率密度を推定したものである。これによると降雨量は指数分布型を示すことがわかる。従って、降雨の分布型としては指数分布を用いた。式(3.6)はこの統計量を示している。

$$\overline{R}=\begin{cases}4+t & (0\leq t\leq 4)\\ 12-t & (4\leq t\leq 8),\\ 0 & (8<t)\end{cases}\qquad \sigma_R{}^2=\begin{cases}0.01 & (\mu_{R3}=2\sigma_R{}^3,\mu_{R4}=9\sigma_R{}^4) & (0\leq t\leq 8)\\ 0 & (\mu_{R3}=0,\mu_{R4}=0) & (8<t)\end{cases} \tag{3.6}$$

ただし、降雨は不規則関数を加えているため負値を生じるのでベースを加えている。図-3.2～3.5は、貯留指数$P=0.4$, 貯留係数$K=20$, $\Delta t=0.05$(hr)としてシミュレーション法と式(2.35)～(2.38)による流出量の1～4次モーメントを示している。理論式による計算では、式(3.3)～(3.5)より降雨量の2～4次モーメントを求めて、これらを式(2.35)～(2.38)に代入している。また、式(2.35)～(2.38)中の係数α, βは、流出量の平均値と分散(図-3.2, 図-3.3)を求めるに際してはそれぞれ第1項のみを採用すれば十分であったが、3,4次モーメント(図-3.4, 図-3.5)においては、第3項まで採用した方が適合度は良かった。

4. まとめ

降雨量が確率変動成分を有する時の貯留型流出モデルにおける流出量の1～4次モーメントを解析的に求めた。これに従い、流出量の分布型の推定が可能になった。$\sigma_r{}^2$, μ_{r3}, μ_{r4}が一定であっても非線形($P\neq 1$)ならば、$\sigma_q{}^2$, μ_{q3}, μ_{q4}は平均降雨量の大きさに応じて変化することがわかった。図-4.1は、図-3.4と3.5の理論解を規準化し図示したものである。紙面の都合上、一定降雨の場合の図は省略するが図-4.1と同様にガンマ分布上を推移し正規分布に漸近することから、流出量の分布型は$\tilde{r}(t)$が指数分布に従い$\sigma_r{}^2$, μ_{r3}, μ_{r4}が

一定値をとるならば$\bar{r}(t)$の大きさによらずガンマ分布を経て正規分布に漸近することがわかった。

本研究は、文部省科学研究費一般研究(B)(代表 藤田睦博)の補助を受けた。関係各位に謝意を表する。

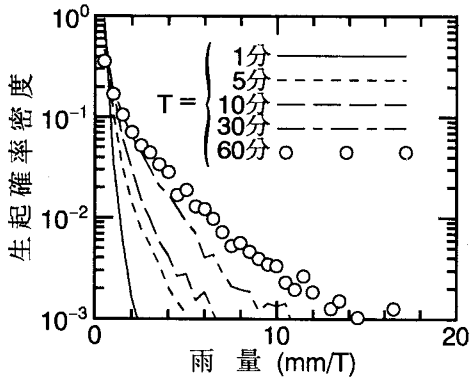

図-3.1

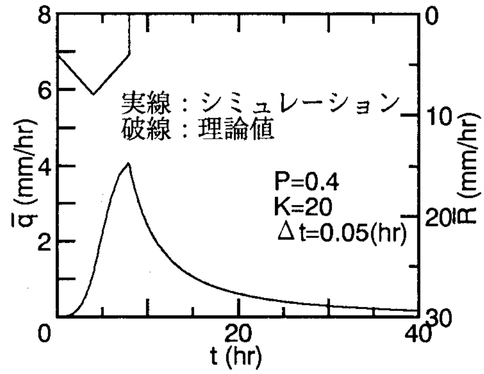

図-3.2 平均値

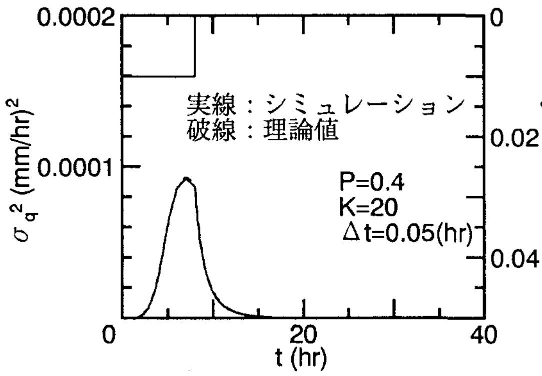

図-3.3 分 散

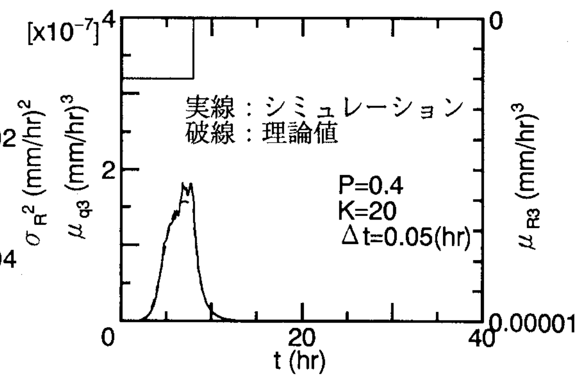

図-3.4 3次モーメント

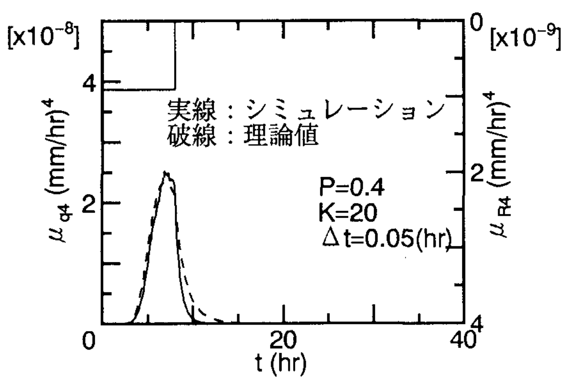

図-3.5 4次モーメント

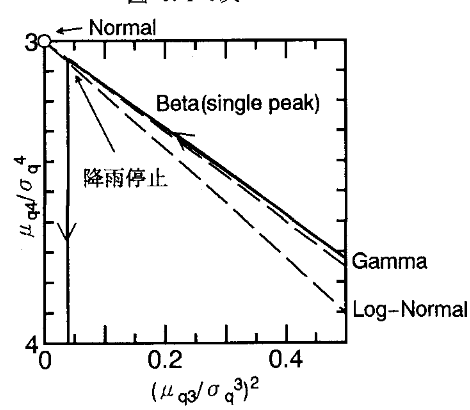

図-4.1

参考文献

1)藤田睦博,中尾隆志,篠原伸和:貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について、水工学論文集、第37巻、1993(投稿中)

2)Bras R.I. and Georgakakos K.P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting: A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp.95～105, 1980