

## II-21

## 蛇行河道の流れの解析法に関する研究

北海道大学大学院 学生員 山田 浩次

北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男

同 上 正 員 板倉 忠興

## 1. はじめに

蛇行水路の流れの解析モデルはこれまでも種々のものが提案されているが、本研究では水深方向に平均した流速を用いて流れの解析を進める浅水流モデルについて検討を行った。

浅水流モデルによる解析に限定しても、研究者によって用いる基礎方程式や線形化の手法さらには解析に用いる線形方程式に大きな違いがみられる現状である。また、直線水路の砂州の解析においても同じ浅水流モデルが用いられているが、両者の間の整合性は必ずしも考慮されていないようである。このことは、今後蛇行流路におけるいろいろな流れの解析を行う上でも、また直線・蛇行流路の移動床現象を含めた諸現象を整合性を保って統一的に説明しようとする際にも不都合であると思われる。

本論では、これまでに提案された浅水流モデルを用いた蛇行流路の解析の中から代表的な3つの研究を取り上げて比較検討すると共に、よりシンプルで的確な線形方程式の誘導方法を検討した。

## 2. 蛇行流路の浅水流モデルの基礎方程式

座標系を図-1のように流路の中央線に沿って $\tilde{s}$ 軸、これに直交するように $\tilde{n}$ 軸をとると、 $\tilde{s}$ 、 $\tilde{n}$ 方向の運動方程式および流れの連続式はそれぞれ次のように与えられる。

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{n}} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} (\tilde{h} \tilde{u}^2) + \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} (\tilde{h} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{2\tilde{h} \tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{r}+\tilde{n}} + \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{n}} g \tilde{h} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{s}} + \frac{\tilde{\tau}_s}{\rho} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{n}} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} (\tilde{h} \tilde{u} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} (\tilde{h} \tilde{v}^2) + \frac{\tilde{h}}{\tilde{r}+\tilde{n}} (\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2) + g \tilde{h} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{n}} + \frac{\tilde{\tau}_n}{\rho} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}+\tilde{n}} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} (\tilde{h} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} (\tilde{h} \tilde{v}) + \frac{\tilde{h} \tilde{v}}{\tilde{r}+\tilde{n}} = 0 \quad (3)$$

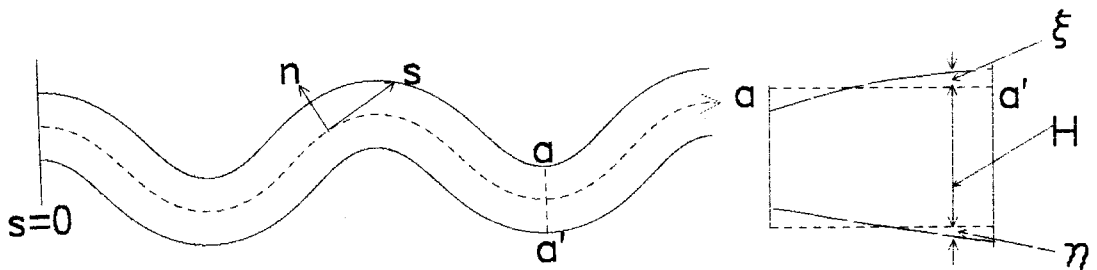


図-1 座標系と記号の定義

Analysis on the Meandering flow

by Khoji YAMADA, Mikio KUROKI and Tadaoki ITAKURA

ここに、 $\widetilde{u}$ 、 $\widetilde{v}$  はそれぞれ  $\widetilde{s}$ 、 $\widetilde{n}$  方向の流速であり、式中の記号の上の横棒は水深平均を表す。 $\widetilde{h}$  は水深、 $\widetilde{\xi}$  は水面の変位量、 $S$  は平均水路勾配、 $g$  は重力加速度、 $\widetilde{r}$  は水路中央の曲率半径、 $\widetilde{\tau}_s$ 、 $\widetilde{\tau}_n$  はそれぞれ  $\widetilde{s}$ 、 $\widetilde{n}$  方向の底面せん断力、 $\rho$  は水の密度である。

浅水流モデルでは、 $\overline{u^2} = \overline{u}^2$ 、 $\overline{v^2} = \overline{v}^2$ 、 $\overline{uv} = \overline{u} \cdot \overline{v}$  と近似するのが普通である。これらの近似を式 (1, 2, 3) に代入し、若干の変形を行うと次式のようになる。

$$\widetilde{u} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{s}} + \left(1 + \frac{\widetilde{n}}{\widetilde{r}}\right) \widetilde{v} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{n}} + \frac{\widetilde{u} \widetilde{v}}{\widetilde{r}} + g \left( \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \widetilde{s}} - S \right) + \left(1 + \frac{\widetilde{n}}{\widetilde{r}}\right) \frac{\widetilde{\tau}_s}{\rho \widetilde{h}} = 0 \quad (1')$$

$$\widetilde{u} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \widetilde{s}} + \left(1 + \frac{\widetilde{n}}{\widetilde{r}}\right) \widetilde{v} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \widetilde{n}} - \frac{\widetilde{u}^2}{\widetilde{r}} + \left(1 + \frac{\widetilde{n}}{\widetilde{r}}\right) \left\{ g \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \widetilde{n}} + \frac{\widetilde{\tau}_n}{\rho \widetilde{h}} \right\} = 0 \quad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{s}} (\widetilde{h} \widetilde{u}) + \left(1 + \frac{\widetilde{n}}{\widetilde{r}}\right) \frac{\partial}{\partial \widetilde{n}} (\widetilde{h} \widetilde{v}) + \frac{\widetilde{h} \widetilde{v}}{\widetilde{r}} = 0 \quad (3')$$

比較検討の対象とした3論文の内、池内・玉井<sup>1)</sup>および長谷川<sup>2)</sup>はこれを基礎式としている。これに対して、池田・西村<sup>3)</sup>は、式 (1, 2) のそれぞれ第1項において、 $\widetilde{r}/(\widetilde{r} + \widetilde{n}) = 1$  と近似したものを基礎式として採用している。

また、底面せん断力の与え方にも、表-1に示すように少しずつ違いが見られる。

表-1 底面せん断力の評価法の比較

|                                   | 池内・玉井                                                                                | 長谷川                                             | 西村・池田                                                           |
|-----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $\frac{\widetilde{\tau}_s}{\rho}$ | $\frac{1}{2} f \overline{u^2}$                                                       | $\frac{1}{2} f \overline{u^2}$                  | $C_f \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2}} \cdot \overline{u}$ |
| $\frac{\widetilde{\tau}_n}{\rho}$ | $\frac{1}{2} A f \overline{u^2} \frac{\widetilde{h}}{\widetilde{r} + \widetilde{n}}$ | $\frac{1}{2} f \overline{u} \cdot \overline{v}$ | $C_f \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2}} \cdot \overline{v}$ |

### 3. 線形化方法の比較

本項では、次の平面形状を有する蛇行水路を対象に、上述の基礎方程式の線形化の違いを比較する。

$$\frac{1}{\widetilde{r}} = \frac{1}{\widetilde{R}} \cos \left( \frac{2\pi \widetilde{s}}{\widetilde{L}} \right) \quad (4)$$

ここに、 $\widetilde{R}$  は最小曲率半径、 $\widetilde{L}$  は  $\widetilde{s}$  軸方向の波長である。

池内・玉井は、 $\widetilde{s}$  軸を最小曲率半径  $\widetilde{R}$  で、 $\widetilde{n}$  軸を水路半幅  $\widetilde{B}/2$  でそれぞれ無次元化している。彼らは、摂動パラメーターとして  $\widetilde{B}/(2\widetilde{R})$  を採用しているため、 $\partial/\partial \widetilde{s}$  と  $\partial/\partial \widetilde{n}$  の項はオーダーが1つ異なることになる。彼らの摂動展開の方法に若干の疑問はあるが、原著の結論をそのまま記すと以下のようになる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial s} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + v_1 \cos k s = -\frac{fR}{2H} (n \cos k s + 2u_1 - \xi_1 - \eta_1) \quad (5)$$

$$\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial n} = \cos k s \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

式(5)の第3項は非線形である。ただし、1次の方程式では横断方向流速の解は0となり、実質的な問題は無いが摂動展開の結果に非線形項が含まれることに疑問が残る。

本法によると、2次の方程式まで求めないと蛇行流路の特徴がでてこなくなっている。このことは、より複雑な流れ（たとえば水理構造物を設置した流れや移動床問題）に応用する際に少なくとも1オーダー高次の解析が必要となり、煩雑となると思われる。

西村・池田は、池内らと同様に摂動パラメータとして  $\widetilde{B}/\widetilde{R}$  を採用している。ただし、s、n方向でオーダーをかえてはいない。彼らは基礎式の摂動展開の方法を具体的に記していないので詳細はよく判らない部分が残るが、1次のオーダーの式としては次式のみが与えられている。

$$\frac{\widetilde{U}^2}{\widetilde{r}} = g \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \widetilde{n}} \quad (8)$$

残りは2次のオーダーの式であり、次の2式のように与えられている。

$$\widetilde{U} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{s}} = -g \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \widetilde{s}} - C f \frac{\widetilde{U}^2}{\widetilde{H}} \left( 2 \frac{\widetilde{u}}{\widetilde{U}} - \frac{\widetilde{\xi}}{\widetilde{H}} - \frac{\widetilde{\eta}}{\widetilde{H}} \right) \quad (9)$$

$$\widetilde{H} \left( \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \widetilde{s}} + \frac{\partial \widetilde{\xi}}{\partial \widetilde{n}} \right) + \widetilde{U} \frac{\partial (\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta})}{\partial \widetilde{s}} = 0 \quad (10)$$

摂動展開の詳細はともかくとしても、次数が1次と2次にまたがるのは具合が良いとはいえない。

一方、長谷川は、影響の少ない項として横断方向流速項と横断方向せん断力項を基礎式から予めの省略して（ただし横断方向流速の微分の項は残す）線形化を行っている。長谷川の提示している線形方程式は、後述する著者らの式とほとんど一致している。

#### 4. 線形基礎方程式の新たな誘導方法

前出の基礎式(1', 2', 3)を平均水深Hと平均流速Uを用いて無次元化する。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{uv}{r} - \frac{S}{F^2} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \xi}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{\tau_s}{h} = 0 \quad (11)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) v \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{u^2}{r} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \xi}{\partial n} + \left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{\tau_n}{h} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(hu) + \left(1 + \frac{n}{r}\right) \frac{\partial}{\partial n}(hv) + \frac{hv}{r} = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$s = \tilde{s}/H, n = \tilde{n}/H, r = \tilde{r}/H, R = \tilde{R}/H, h = \tilde{h}/H, \eta = \tilde{\eta}/H, \xi = \tilde{\xi}/H, u = \tilde{u}/U, v = \tilde{v}/U$$

ここで、変量を平均量とそれからの変動量に分離する。

$$\begin{aligned} u &= 1 + u', & v &= 0 + v' \\ h &= 1 + h', & \eta &= 0 + \eta', & h' &= \xi' + \eta' \end{aligned} \quad (14)$$

プライムの付いた変動量と  $1/r$  のオーダーが等しいものとし、2 次以上の項を無視して整理すると、次式のような線形方程式が求められる。

$$\frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \xi'}{\partial s} + \frac{S}{F^2} \left( 2u' - \frac{4}{3}h' + \frac{n}{r} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial s} - \frac{1}{r} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial \xi'}{\partial n} + \frac{S}{F^2} v' = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial s} + \frac{\partial h'}{\partial s} + \frac{\partial v'}{\partial n} = 0 \quad (17)$$

ただし、 $\tilde{\tau}_s$ ,  $\tilde{\tau}_n$  は表-1 の長谷川と同様にとり、抵抗則として  $\phi_0 = \frac{u}{u_*} = 6.9 \left( \frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{6}}$  を用いた。

## 5. 方程式の解

式(15), (16), (17)に平衡河床形  $\eta = n\eta_0 \cos ks$  を与えた場合の解の求め方を以下に示す。まず、解は以下のように仮定することができる。

$$u' = \hat{u} * \exp(iks) \quad (18)$$

$$v' = \hat{v} * \exp(iks) \quad (19)$$

$$\xi' = \hat{\xi} * \exp(iks) \quad (20)$$

ただし、 $\hat{u}, \hat{v}, \hat{\xi}$  は  $n$  の関数で、河床形も  $\eta = n\eta_0 \exp(iks)$  とおける。これを式(15), (16), (17)に代入すると、次式が得られる。

$$ik\hat{u} + \frac{ik}{F^2} \hat{\xi} + \frac{S}{F^2} \left( 2\hat{u} - \frac{4}{3}\hat{\xi} - \frac{4}{3}\eta_0 n + \frac{n}{R} \right) = 0 \quad (20)$$

$$ik\hat{v} - \frac{1}{R} + \frac{1}{F^2} \hat{\xi}_n + \frac{S}{F^2} \hat{v} = 0 \quad (21)$$

$$ik\hat{u} + ik\hat{\xi} + ikn\eta_0 + \hat{v}_n = 0 \quad (22)$$

各係数を以下のように置き換える。

$$a_1 \hat{u} + a_2 \hat{\xi} = n \left( \frac{4}{3} \eta_0 - \frac{1}{R} \right) c \quad (23)$$

$$b_1 \hat{v} + b_2 \hat{\xi}_n = \frac{1}{R} \quad (24)$$

$$c_1 \hat{u} + c_2 \hat{\xi}_n + \hat{v}_n = -c_1 \eta_0 n \quad (25)$$

係数は付録1に示す。

(23)と(25)から  $\hat{u}$  を消去すると、 $\hat{v}$  と  $\hat{\xi}_n$  の式が得られ、それを微分して(24)を用いて  $\hat{\xi}_n$  を消去すると、 $\hat{v}$  に関する以下のような2階常微分方程式が得られる。

$$v_{nn} + A \hat{v} = q \quad (26)$$

係数は付録2に示す。

これを解いて、(24)、(23)に代入すると、 $\hat{\xi}_n$ 、 $\hat{u}$  が得られる。以下にそれを示す。

$$\hat{u} = \left( A_1 \frac{1}{r_0} + A_2 \eta_0 \right) n + \left( A_3 \frac{1}{r_0} + A_4 \eta_0 \right) \sin \lambda n \quad (27)$$

$$\hat{v} = \left( B_1 \frac{1}{r_0} + B_2 \eta_0 \right) \left( \cos \lambda n - \cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda \right) \quad (28)$$

$$\hat{\xi}_n = \left( C_1 \frac{1}{r_0} + C_2 \eta_0 \right) n + \left( C_3 \frac{1}{r_0} + C_4 \eta_0 \right) \sin \lambda n \quad (29)$$

係数は付録3に示す。

このように、今回の線形式の解は、 $1/r$  と  $\eta_0$  の2項に分けることができる。この2つの値を変化させて、それによる解の変化を調べてみる。

まず、図-2に  $\eta_0$  の値を変化させたときの解の変化を示す。 $u$ 、 $v$ 、 $h$  いずれも河床が平坦な場合にはほとんど0で、 $\eta_0$  が大きくなるにつれて変動が大きくなる。 $u'$  と  $v'$  は逆位相に近い関係である。またそれ

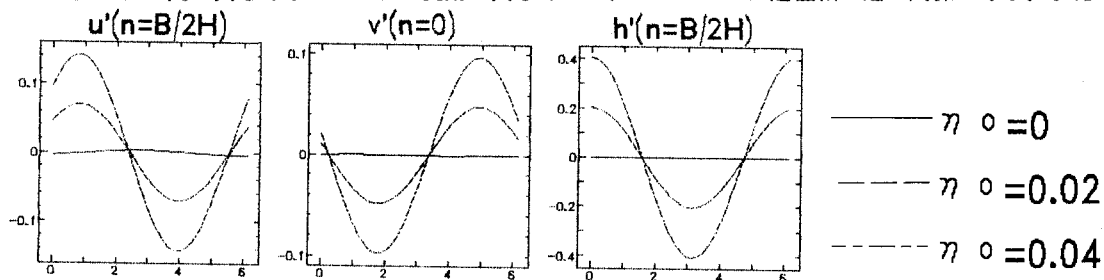


図-2  $\eta_0$  の値による解の変化

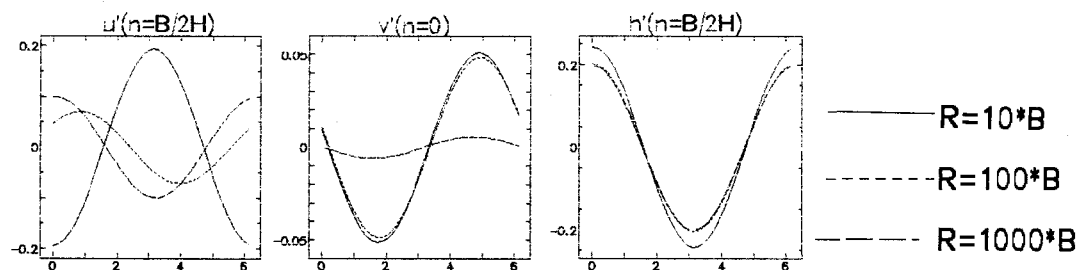


図-3  $R$  の値による解の変化

その位相は  $\eta_0$  によってほとんど変わらない。次に、図-3に最小曲率半径  $R$  の値を変化させたときの解の変化を示す。 $R$  が小さいほど流下方向の変動が大きく、また  $u'$  の位相が  $R$  の変化につれて変わっていき、外岸側が速くなる場合も現れる。 $h$  は常に曲率に合わせて同じ位相で変化し、外岸側が大きくなっている。

## 6. 終わりに

・無次元化の仕方を変えることにより、線形方程式をよりシンプルな過程で求めることができ、扱い易さとある程度の精度を持つと思われる。さらに精度を高めるには必要に応じて2次流を考慮すればよいと思われるが、2次流についての検討ははこれからの課題である。

・得られた解は  $1/r$  の項と  $\eta$  の項に分けられるので、今後の解析的研究を進める際に有意義であると思われる。

・曲率半径が非常に小さい場合、外岸側の流速が大きくなる場合があったが、理論的な裏付けははっきりしない。

## 参考文献

- (1) 池内幸司・玉井信行：蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性、土木学会論文報告集第334号
- (2) 長谷川和義：蛇曲流路における流れと平衡底面形状に関する研究、土木学会論文報告集第338号
- (3) 池田駿介・西村達也：砂床蛇行河川の三次元流れと河床形状、土木学会論文集第369号

## 付録1

$$a_1 = ik + 2c, a_2 = \frac{ik}{F^2} - \frac{4}{3}c, b_1 = ik + c, b_2 = \frac{1}{F^2}, c_1 = ik, c = \frac{S}{F^2}$$

## 付録2

$$A = \frac{a_2 b_1 c_1}{a_1 F r^2} + \frac{b_1 c_1}{F r^2}$$

$$q = q_1 + \eta_0 q_2$$

$$q_1 = -\frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{a_2 c_1}{a_1 F^2} - \frac{c_1}{F^2} + \frac{c_1 S}{a_1 F^2} \right), \quad q_2 = \frac{1}{\lambda^2} \left( c_1 + \frac{a_1 S}{c_1 F^2} \right)$$

## 付録3

$$\lambda = \sqrt{A}$$

$$A_1 = -\frac{S}{a_1 F^2} - \frac{a_2}{a_1 F^2} (1 + q_1 b_1), \quad A_2 = \frac{S}{a_1 F^2} - \frac{a_2}{a_1 F^2} q_2 b_1$$

$$A_3 = \frac{a_2}{a_1} \frac{1}{\lambda} q_1 \frac{i}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda} \frac{b_1}{F^2}, \quad A_4 = \frac{a_2}{a_1} \frac{1}{\lambda} q_2 \frac{i}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda} \frac{b_1}{F^2}$$

$$B_1 = q_1 \frac{1}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda}, \quad B_2 = q_2 \frac{1}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda}$$

$$C_1 = (1 + q_1 b_1) \frac{1}{F^2}, \quad C_2 = q_2 \frac{b_1}{F^2}$$

$$C_3 = -\frac{1}{\lambda} q_1 \frac{i}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda} \frac{b_1}{F^2}, \quad C_4 = -\frac{1}{\lambda} q_2 \frac{i}{\cos \frac{B_0}{2H_0} \lambda} \frac{b_1}{F^2}$$