

II-16

2次元MacCormack法を用いた射流分岐水路の流れの解析

北海道大学 正 員 長谷川 和義

北海道大学 学生員 納 弘

北海道大学 学生員 水柿 俊直

1) はじめに

著者¹⁾らは、山地河川の流れの形態を調べるために定山渓流域白水仙などにおいて様々な現地観測を行ってきた。その中で、流路の分岐部において片側流路の入り口に土砂が堆積しその流路が閉塞している状況がしばしば見られた。その堆積は最大で高さ1.5mにも達しており、その下流側には平常時に水がほとんど流れていない廃棄河道が存在していた。著者^{2) 3)}らは、この堆積が洪水時に分岐部で起こる跳水により引き起こされたのではないかと考え、1次元の数値解析、中の島のない平行分岐水路実験、中の島を設けた分岐水路実験、などにより跳水の性質について調べてきたが流路の閉塞を再現するまでには至らなかった。そこで本研究では、中の島を伴う射流分岐水路の流れを、常、射流混在の元でも適用可能な保存型差分の一種である2次元MacCormack法を用いて解析し、実験値との照合を試みた。これらの方法が完成されれば分岐流路の形状を種々に変えた流れのより深い考察が可能になるであろう。MacCormack法^{4) 5) 6)}は、跳水を伴う流れの数値計算に非常に有効であると考えられている衝撃波捕獲法の差分スキームの一種であり、格子点上の値のみで差分スキームを記述できるという計算上の利点がある反面、物理的に意味のない数値変動を生じやすい。そのため差分スキームを不連続性をよくシミュレーションできる高解像スキームのTVD形式^{7) 8)}に書き換えて計算を行った。

2) 分岐形状と基礎方程式

計算における分岐部の形状は、図-1に示すような分岐角45度のものを対象とした。これは現地観測において測定した、閉塞した分岐流路の分岐角がほぼ40度から60度の間に入っているため計算上都合のよい45度を採用した。また分岐後の水路幅は等しいとして中の島の影響のみを考慮することにした。計算に用いたのはx, y方向の直交座標であり、基礎方程式は下のように示される。

$$U_T + E_x + F_y = C \quad (1)$$

$$U_T = \begin{bmatrix} h \\ u h \\ v h \end{bmatrix}, \quad E_x = \begin{bmatrix} u h \\ u^2 h + g h^2 / 2 \\ u v h \end{bmatrix}, \quad F_y = \begin{bmatrix} v h \\ u v h \\ v^2 h + g h^2 / 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ G_x \\ G_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし

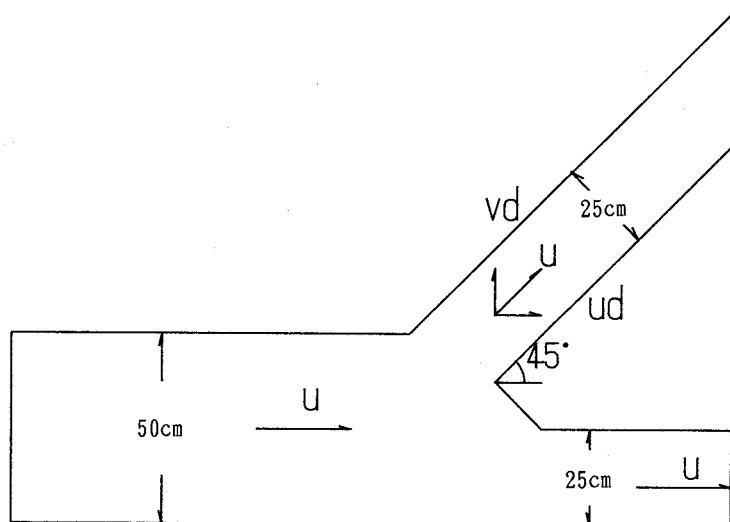
$$G_x = g h \left(S_{0x} - \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial (u h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial (u h)}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$G_y = g h \left(S_{0y} - \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial (v h)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial (v h)}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$S_{0x} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad S_{0y} = -\frac{\partial z}{\partial y} \quad (5) \quad \epsilon = \frac{\kappa}{6} u \cdot h \quad (6)$$

Numerical analysis for supercritical bifurcated channel flow by using 2-D MacCormack method.

By KAZUYOSHI HASEGAWA, HIROSHI OSAME, TOSHINAO MIZUGAKI



図－１ 計算に用いた分岐流路の形状

ここに、 h ：水深、 u ： x 方向の流速、 v ： y 方向の流速、 g ：重力加速度、 z ：河床高、 ε ：渦動粘性係数、 κ ：カルマン定数、 u_* ：摩擦速度、 n ：マンニングの粗度係数、である。

３）MaCormack差分スキーム

差分スキームは、2次精度のMaCormack法を採用した。ここでは、先に述べたような物理的に意味の無い数値振動を抑えるために、時間分割法により基礎方程式を x 方向と y 方向に分割し、それぞれを2次精度のTVDスキームとなるように書き換えて数値振動を抑制した。 x 、 y 方向の差分演算子を $L_x(\Delta t)$ 、 $L_y(\Delta t)$ のように表すと、解は以下の演算によって求められる。

$$U_{i,j}^{n+1} = L_x(\Delta t_x) L_y(\Delta t_y) L_y(\Delta t_y) L_x(\Delta t_x) U_{i,j}^n \quad (7)$$

ただし $\Delta t_x = \Delta t_y = \frac{1}{2} \Delta t$ である。ここで(7)式における L_x および L_y はそれぞれ予測子 (Predictor)、修正子 (Corrector) の2段階に分けて計算を行い、それぞれの予測子、修正子段階における差分の方向は表－1に示すように行う。

表－１ 各ステップにおける差分方式

第１ステップの L_x	予測子：後退差分 修正子：前進差分	第２ステップの L_y	予測子：後退差分 修正子：前進差分
第３ステップの L_y	予測子：前進差分 修正子：後退差分	第４ステップの L_x	予測子：前進差分 修正子：後退差分

またTVD形式の2次元MacCormack法は例えばx方向について次のように表される。

$$\text{予測子段階: } U_{i,j}^p = U_{i,j}^{(n)} - \frac{\Delta t_x}{\Delta x} (E_{i,j}^{(n)} - E_{i-1,j}^{(n)}) + \Delta t_x C_{i,j}^{(n)} \quad (8)$$

$$\text{修正子段階: } U_{i,j}^{(n+\Delta t_x)} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^{(n)} + U_{i,j}^p) - \frac{\Delta t_x}{2\Delta x} (E_{i+1,j}^p - E_{i,j}^p) + \frac{\Delta t_x}{2} C_{i,j}^p + \text{TVD}_{i,j} \quad (9)$$

ただし $E_{i,j}^p = E(U_{i,j}^p)$, $C_{i,j}^p = C(U_{i,j}^p)$

$$\text{TVD}_{i,j} = \{G^+[r_{i,j}^+] + G^-[r_{i+1,j}^-]\} \Delta U_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} - \{G^+[r_{i-1,j}^+] + G^-[r_{i,j}^-]\} \Delta U_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)} \quad (10)$$

$$\Delta U_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)} = U_{i+1,j}^{(n)} - U_{i,j}^{(n)}, \quad r_{i,j}^+ = \frac{1}{r_{i,j}^-} = \frac{\Delta U_{i-\frac{1}{2},j}^{(n)}}{\Delta U_{i+\frac{1}{2},j}^{(n)}} = \frac{U_{i,j}^{(n)} - U_{i-1,j}^{(n)}}{U_{i+1,j}^{(n)} - U_{i,j}^{(n)}} \quad (11)$$

$$G^+[r_{i,j}^+] = \frac{|\nu|}{2} (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_{i,j}^+)], \quad \nu = \{\max(U_{i,j} + \sqrt{gh_{i,j}})\} \frac{\Delta t_x}{\Delta x} \quad (12)$$

$$\phi(r_{i,j}) = \begin{cases} \min(2r_{i,j}; 1) & ; r_{i,j} > 0 \\ 0 & ; r_{i,j} \leq 0 \end{cases} \quad (\text{制限関数}) \quad (13)$$

4) 計算の手法

(1)境界条件

上に述べた形式で基礎方程式をx、y方向に差分し、図-1に示した初期条件の元で計算を行うが、分岐流路の形状を加味しているため境界条件の設定が非常に困難である。そこで、反射法を用いた。これは、境界面の外側に内側と同じ流れが存在していると仮定する方法であり、流れに沿う境界（分岐前上流の側壁など）では有効である。しかし流れが直接衝突するような境界（分岐部中の島に相当する側壁、および斜め水路の上流側の側壁）では、この条件だけでは不十分であることが計算を進めていくうちに判明した。そこで、これらの境界面上の計算点で流れが境界に沿って流れるように、連続式を満たす条件の元で流速の向きを補正することにした。また中の島の頂点では初期状態でx、y方向の流速を0とし、その後はx方向の流速のみを強制的に0とした。

(2)初期条件

計算では上流側流量を固定つまり定常状態とし、最初に計算領域の全断面に等しい水深 $h_0 = 4.5\text{cm}$ を与える。すなわち初期状態では分岐後の流量比が1:1になっている。初期流速は図-1に示すとおりである。この状態は物理的に矛盾しているが、MacCormack法ではこのような状態から解が安定に存在しうる状態になるまで計算を繰り返す方法をとっている。またこの分岐形状では初期流速の決め方が非常に難しく、中の島の頂点の上流側延長線を境にy方向流速を反対の向きに与えた場合に、その線上で水深が極端に小さくなり計算が続行できなくなった。これらの条件の設定法は今後解決すべき重要な課題である。

(3)人工粘性

MacCormack法では、よどみ点などで中立安定になり不安定化する恐れがある。これを防止するために高次の人工粘性を陽的に付加する方法が様々提唱されているが、多次元問題について理論的に導き出されていない。そこで今回は、1次元の問題で使われている形式の数種の人工粘性を2次元に拡張して使用してみた。その結果、TVD形式では良い結果が得られたが、他の方法は数値振動を抑えられず解が発散する結果となった。ただしTVD形式の人工粘性は今回のような境界が複雑な場合、取扱いが非常に難しいのが難点である。

5) 計算結果と実験値の照合

図-2、図-3に計算により得られた流速分布を、図-4に同様な分岐形状で同じ水理条件の実験で得られた流速分布を示す。

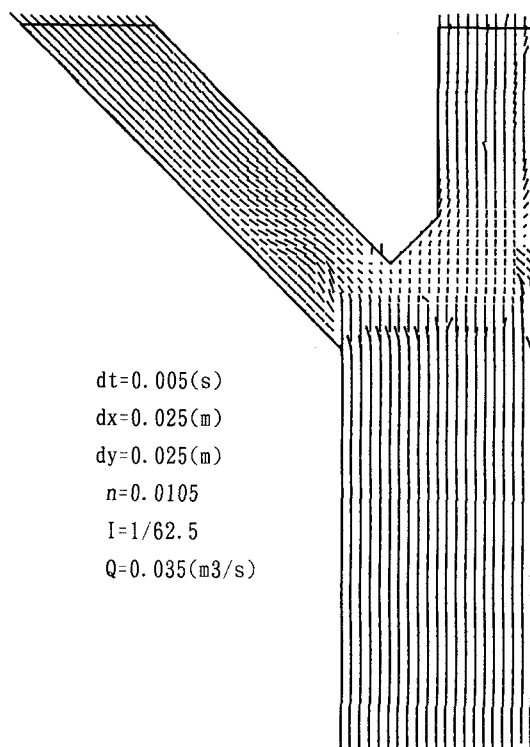


図-2 収束条件の緩い場合の流速分布

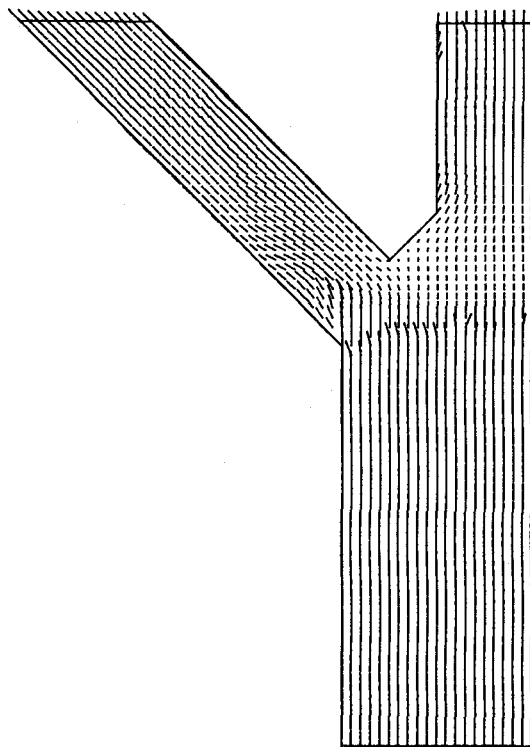


図-3 収束条件のきつい場合の流速分布

ここで、図-2は収束条件を計算領域の全断面の水深 h 、 x 方向流速 u 、 y 方向流速 v の値とタイムステップ1回前のそれらの値との差の合計が0.1mmのオーダーよりも小さくなるように選び、その状態が連続10回続いた時に結果を打ち出したものである。この場合収束するまでの時間はタイムステップの時間でおよそ7秒であった。図-3は同様の収束条件をさらに厳しくしたもので、この場合30秒を越えても収束していないためその時点で計算を打ち切った。これらはともにタイムステップを0.005秒にとっており、初期条件は両者とも全て同じである。これらより、側壁近傍値の振動成分などを除けば、両者ともほぼ一樣の流速分布が得られているものと判断される。これらを図-4と比較してみると、実験での測定値が少ないことや分岐形状が多少異なることから、解析値と実験値の比較は難しいものの、分岐後の流量配分比が実験値の6.4:3.6と全く同じになっている。したがって、流れの分流というマクロ的視野から考えた場合、解析値が実験値をかなり良く模擬しているものと思われる。

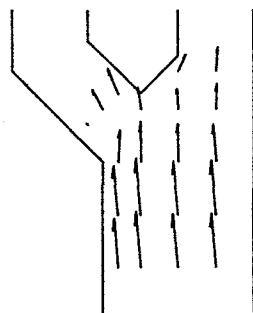


図-4 実験で得られた流速分布

図-5、図-6は図-3の場合に対応する水深とフルード数のコンター図であり、図-7は図-4に対応する実験値の水深のコンター図である。図-7から実験では分岐点（中の島の頂点）の上流40cmから50cm辺りで流れが射流から常流に遷移して跳水が発生しているのが分かる。計算値では、跳水のフロントの位置が少し下流側にずれてはいるが、跳水そのものは再現されていることが分かる。

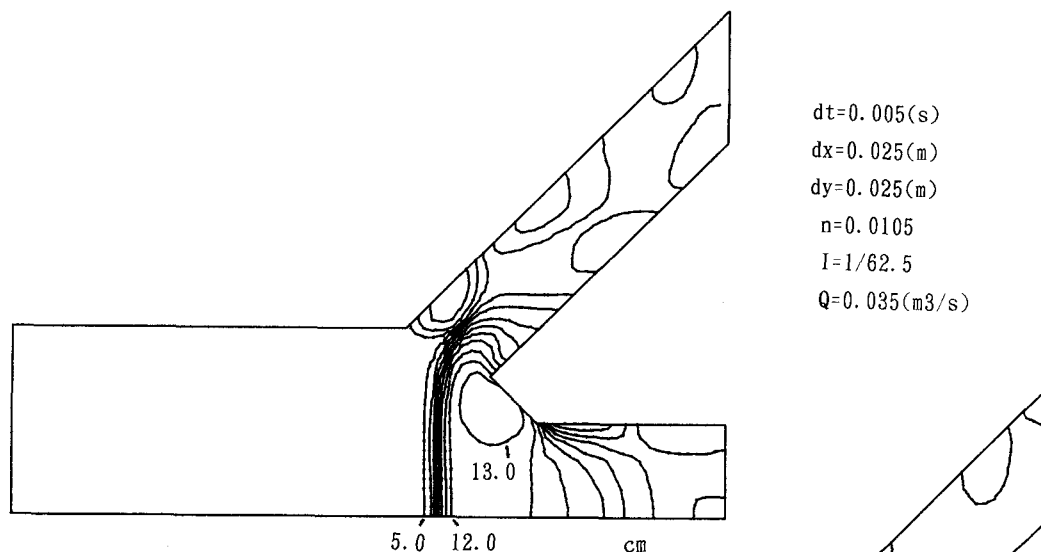


図-5 計算による水深コンター図

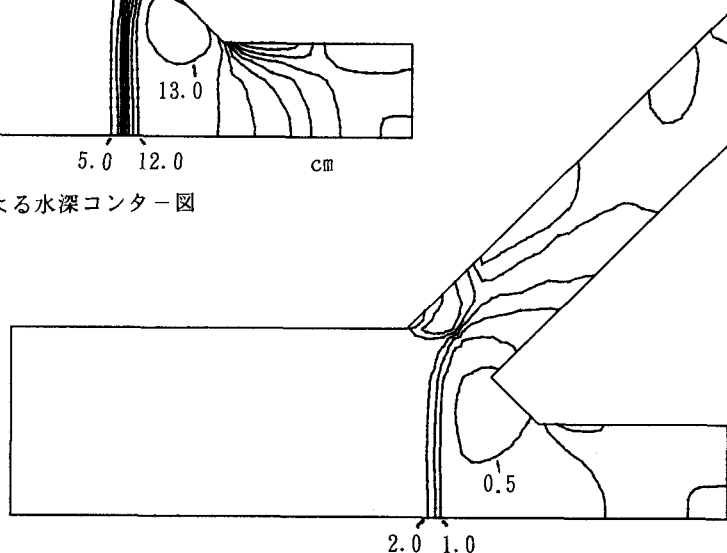


図-6 計算によるフルード数コンター図

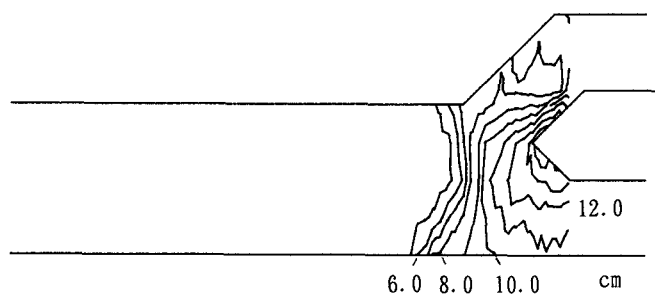


図-7 実験値の水深コンター図

6) 結論

本研究では、2次元のMacCormack法を用いて中の島を伴う射流分岐水路の流れを解析した。分岐部の形状が計算上の境界となるため境界条件がかなり複雑なものになったが、初期流速や人工粘性を工夫することにより計算を安定させることができた。このうち人工粘性については数種類のものを使用した結果、TVD形式により数値振動を抑えることに成功した。また、類似した分岐形状の実験値と数値解を照合した結果、分岐部上流での跳水の発生や、分岐後の流量配分比などの流れの全体像を数値解析により再現することができた。しかし、初期流速の設定や境界面での流速の取扱いなど難しい問題が残っており、これらを今後克服し、任意の分岐形状の流れの解析に適用することが今後の課題である。

謝辞：本研究を進めるにつき、北海道大学工学部 森 明巨先生からMacCormack法についての示唆を頂戴した。
ここに深く感謝の意を表する次第である。

【参考文献】

- 1) 長谷川和義・水柿俊直・納 弘：分岐部反力が働く射流分岐水路における流れと土砂堆積、道支部論文報告集第49号（本論文集）
- 2) 石川 伸：山地河川における分岐・合流流路の形態とその変動に関する研究、平成2年度北海道大学工学部修士論文
- 3) 長谷川和義・納 弘・石川 伸：射流分岐水路における跳水の発生条件、第36回水理講演会論文集
- 4) 流れの数値シミュレーション：日本機械学会 編
- 5) 崇田徳彦・清水康行・渡邊康玄：MacCormack法を用いた常・射流計算、北海道開発局開発土木研究所月報1990年9月
- 6) Garcia, R. and Kahawita, R.: Numerical solution of the St. venant equation with the MacCormack finite-difference scheme: International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, 1986
- 7) 河村三郎・中谷剛・前田哲史：常流・射流の混在する流れの数値計算法に関する研究、土木学会第47回年次学術講演会1992、pp. 624-625
- 8) 保原充・大宮司久明 編：数値流体力学、東京大学出版会