II－12
二次元浅水流式の座標系によらない風上型FLUX配分数値計算法

北海道大学工学部　　　高　橋　良　直
北海道大学工学部　正員　森　　明　臣
北海道大学工学部　正員　板　倉　忠　興

１．はじめに
本研究は，特性曲線の理論によって双曲型の偏微分方程式である２次元浅水流方程式を解こうとするものである。Roeグループにより，GMD(Genuinely Multi-Dimentional)とUSG(UnStructured Grid)を組み合わせた計算法が開発されつつある。

流れの場を複数の擾乱で表し，各擾乱の伝播方向に風上差分するのである。２つの方法が提唱されているが，そのうち１つは特性帯の理論に基づくものである。本研究はこれを河川流れに応用するための基礎方程式を導いたものである。

２．基礎方程式とその変形
基礎式は（１）式である。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+A\frac{\partial \phi}{\partial x}+B\frac{\partial \phi}{\partial y}=C \tag{1}$$

ここで、

$$\phi=\begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ h & 0 & u \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & h & v \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} g\partial \phi/\partial x+F_x \\ g\partial \phi/\partial y+F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_x=Mv+\frac{\tau_{sx}}{\rho(Z+\zeta)}-\frac{\tau_{bx}}{\rho(Z+\zeta)},\ F_y=-Mu+\frac{\tau_{sy}}{\rho(Z+\zeta)}-\frac{\tau_{by}}{\rho(Z+\zeta)}$$

u，v：流速成分，h：水深，M：コリオリのパラメーター，τ　：せん断力

ここで，$\phi=\phi(x,y,t)$ だが，特性曲面上においては $t=\beta(x,y)$ と表せるから特性曲面上の解 ϕ_0 は，$\phi_0=\phi_0(x,y,t)$ である。

よって，

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x},\ \frac{\partial \phi_0}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y}$$

また，

$$R=I-A\frac{\partial \beta}{\partial x}-B\frac{\partial \beta}{\partial y},\ X=\frac{\partial \phi}{\partial t},\ Y=C-A\frac{\partial \phi_0}{\partial x}-B\frac{\partial \phi_0}{\partial y}$$

とおくと，

$$RX=Y \tag{2}$$

と書くことができる。

特性曲面上では $|R|=0$ である。

すなわち，

Analysis of 2D Shallow Water Equation
by Yoshinso Takahashi, Akio Mori, Tadaoki Itakura

$$R=\begin{vmatrix} 1-up-vq & 0 & -gp \\ 0 & 1-up-vq & -gq \\ -hp & -hq & 1-up-vq \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

$p=\rho\cos\theta$, $q=\rho\sin\theta$, $c=\sqrt{gh}$ と置くと，

$(1-up-vq)^2-gh(p^2+q^2)=0$, $1-up-vq=0$

$\therefore 1-up-vq=\rho c$, $1-up-vq=0$

$$\therefore \rho=\frac{1}{c+u\cos\theta+v\sin\theta}\ (=\rho_1)\ ,\ -\frac{1}{c+u\cos\theta+v\sin\theta}\ (=\rho_2)$$

$$\rho=\frac{1}{c-u\cos\theta-v\sin\theta}\ (=\rho_3)$$

$\rho=\rho_1, \rho_2, \rho_3$ のときのRをそれぞれR_1, R_2, R_3 とすると，

$$R_1=\begin{pmatrix} \frac{c}{c+u\cos\theta+V\sin\theta} & 0 & -gp \\ 0 & \frac{c}{c+u\cos\theta+v\sin\theta} & -gq \\ -hp & -hq & \frac{c}{c+u\cos\theta+v\sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$R_2=\begin{pmatrix} -\frac{c}{c+u\cos\theta+v\sin\theta} & 0 & -gp \\ 0 & -\frac{c}{c+u\cos\theta+v\sin\theta} & -gq \\ -hp & -hq & -\frac{c}{c+u\cos\theta+v\sin\theta} \end{pmatrix}$$

$$R_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -gp \\ 0 & 0 & -gq \\ -hp & -hp & 0 \end{pmatrix}$$

$L_iR_i=0$ $(i=1,2,3)$ を満たすL_i を求め，$L=\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ とする。

（1）式の左から，Lをかけると，

$$L\frac{\partial\phi}{\partial t}+LA\frac{\partial\phi}{\partial x}+LB\frac{\partial\phi}{\partial y}=LC=\Omega \tag{4}$$

$$\therefore L\frac{\partial\phi}{\partial t}+LAL^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial x}+LBL^{-1}=\Omega \tag{5}$$

$$\therefore \frac{\partial W}{\partial t}+LAL^{-1}\frac{\partial W}{\partial x}+LBL^{-1}\frac{\partial W}{\partial y}=\Omega \tag{6}$$

ここで，Wは特性変量である。$W=\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}$, $\Omega=\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$ とすると，

$W=L\phi$, $\partial W=L\partial\phi$ だから，

$$W_1=\frac{c\cos\theta}{g}u+\frac{c\sin\theta}{g}v+h=\frac{c}{g}[c+(u\cos\theta+v\sin\theta)] \tag{7a}$$

$$W_2=-\frac{c\cos\theta}{g}u-\frac{c\sin\theta}{g}v+h=\frac{c}{g}[c-(u\cos\theta+v\sin\theta)] \tag{7b}$$

$$W_3=-u\sin\theta+v\cos\theta \tag{7c}$$

W_1，W_2は長波であり，W_3はせん断波である。

また，

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}+\vec{u}\cdot\vec{\nabla}W_1+\vec{a}\cdot\vec{\nabla}W_3=\Omega_1 \tag{8a}$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial t}+\vec{v}\cdot\vec{\nabla}W_2+\vec{a}\cdot\vec{\nabla}W_3=\Omega_2 \tag{8b}$$

$$W_3=-u\cos\theta+v\sin\theta \tag{8c}$$

ただし，

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}u+c\cos\theta\\ v+c\sin\theta\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}u-c\cos\theta\\ v-c\sin\theta\end{pmatrix},\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}-h\sin\theta\\ h\cos\theta\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-g\cos\theta/2\\ -g\sin\theta/2\end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}W=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

である。

（８）式が流れを解くための基礎方程式である。$\vec{a}$ と$\vec{\nabla}W_i$ が直交するようにとることができて，このとき（８），（９）式は，それぞれW_1，W_2のみの式なる。

また，$\vec{b}$ と直交するようにθ をとるこができれば（８ｃ）式はW_3のみの関数になる。この場合には，特性方向に各特性変量に風上差分する事により，GMDで計算が可能である。$\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}W_1+\vec{\nabla}W_2)\neq 0$ の場合には$|\vec{b}\cdot(\vec{\nabla}W_1+\vec{\nabla}W_2)|$ が最小となるθ を選ぶことが提案されている。このときのcoupling方には中央差分を用いる。

（参考文献）

１）板倉，黒木，森：複断面流路の流れと土砂動態に関する研究

２）Deconink, Hirsch, Peuteman:CHARASTERISTIC DECOMPOSION METHODS FOR THE MUTIDIMENSIONAL EULER

３）Matsoukis:THE APPLICATION OF THE METHODS OF CHARACTERISTIC FOR THE SIMULATION OF NEARLY HORIZONTAL FLOW IN TWO AND THREE SPATIAL DIMENSIONS