

II-10

急勾配水路の水面波の成因について

北海道大学工学部 学生員 佐藤 圭
 北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男
 北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

1981年8月23日、台風15号が北海道南西部に上陸し、全道で八千六百戸が浸水するなど被災は八十五市町村に及んだ。激流と化した石狩川左支川豊平川では、河幅中央部に著しい三角波の現象(写真-1)がみられた。

中規模河床形態では波長が河幅に支配される。ところが三角波の波長は短く、明らかに河幅スケールの支配下でない。又、 k のオーダーをみても、これまでの砂州の解析方法では適切な説明はできない。

ここで縦・横断方向の波数 k 、 ℓ を次式で定義する。

$$k = \frac{2\pi H}{L}, \quad \ell = \frac{m\pi H}{B} \quad (1)$$

ただし、 L は三角波の波長、 B は水路幅、 m は横断方向の分割数である。

本研究では、三角波のように河幅中央部が局所的に隆起する波として、図-1に示すような波を想定した。図-1は $m=2$ 、 $m=4$ の場合の横断方向の波形とその重ね合わせの波形である。当時の記録では $H/B=5/80$ 程度であり、このとき $m=2$ 、 4 の場合についてそれぞれ $\ell=0.4$ 、 0.8 程度となる。よって、三角波がとり得る k の範囲で、これらの ℓ について河床擾乱の不安定領域が実在すれば、図-1の波の存在可能性が証明できる。



写真-1

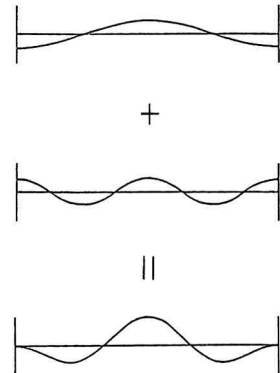


図-1

2. 流れの基礎方程式とその無次元線形化

流れは2次元浅水モデルで表されるものとし、本解析では図-2のように座標系をとる。 x 、 y 方向の流れの運動方程式及び流れ、流砂の連続方程式はそれぞれ以下のように表すことができる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g I - \frac{\tau_x}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial x} (h + \eta) + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\tau_y}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial y} (h + \eta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u h) + \frac{\partial}{\partial y} (v h) = 0 \quad (4)$$

The Origin Of Water Surface Wave In Steep Slope Channnel

by Kei SATOH, Mikio KUROKI and Tadaoki ITAKURA

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-n} \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (5)$$

ここに、 x, y : 縦, 横断方向の座標、 u, v : x, y 方向の流速成分、 I : 水路床勾配、 h : 水深、 ρ : 水の密度、 η : 河床形状、 g : 重力加速度、 τ_x, τ_y : x, y 方向の河床せん断力、 n : 河床の空隙率、 s : 河床砂礫の水中比重、 q_x, q_y : x, y 方向の流砂量、 τ_* : 無次元河床せん断力、 ε : 渦動粘性係数である。

次に、平均流速 U 、平均水深 H 、平均せん断力 τ_b 、平均流砂量 q_B 、を用いて各変量を基本流に対応する平均量と、河床の微小な擾乱に対応する変動量に分けて次式のように表す。無次元変動量は記号の上に波形を付して区別する。

$$\begin{aligned} u &= U(1 + \tilde{u}), \quad v = U\tilde{v}, \quad h = H(1 + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}), \quad \eta = H \cdot \tilde{\eta}, \quad \xi = H \cdot \tilde{\xi} \\ \tau_x &= \tau_b(1 + \tilde{\tau}_x), \quad \tau_y = \tau_b \cdot \tilde{\tau}_y, \quad q_x = q_B(1 + \tilde{q}_x), \quad q_y = q_B \cdot \tilde{q}_y \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 ξ は水面変位量である。

(6) 式を用いて (2, 3, 4, 5) 式について線形化及び無次元化を行うと次式を得る。

$$F^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x^*} + I(\tilde{\eta} - \tilde{\xi} + \tilde{\tau}_x) - F^2 \varepsilon^* \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial y^{*2}} = 0 \quad (7)$$

$$F^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y^*} + I \tilde{\tau}_y = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y^*} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x^*} - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x^*} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t^*} + A_s \left(\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x^*} + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial y^*} \right) = 0 \quad (10)$$

ここに $x^* = x/H$, $y^* = y/H$, $t^* = tU/H$,

$$F^2 = U^2 / (gH), \quad A_s = q_B / \{ (1-n)UH \}.$$

次に流れの抵抗則であるが、ここでは平坦床の抵抗則、Manning-Strickler型の表現を用いて、次式のように与える。

$$\phi = 6.9 (H/d)^{1/6} \quad (11)$$

河床せん断力については、黒木らの式をそのまま引用し次式で表す。

$$\tilde{\tau}_x = \alpha_1 \tilde{u} - \alpha_2 (\tilde{\xi} - \tilde{\eta}), \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = \frac{2H/d}{\phi} \cdot \frac{d\phi}{dh} \Big|_{h=H} = \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$\tilde{\tau}_y = \tilde{v} + \alpha_3 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y^*}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{2} \frac{\Phi}{\mu \phi \sqrt{\tau_*}} \quad (13)$$

ここに、 μ_c, μ はそれぞれ静止、動摩擦係数であり $\mu_c = 0.8$ 、 $\mu = 0.5$ とする。無次元限界掃流力 τ_* は近似的に $\tau_* = 0.05$ とした。流砂関数 Φ は $\Phi = 8(\tau_* - 0.05)^{3/2}$ とした。

本論では流砂として掃流砂のみを対象とするが、掃流運動に限っても、多様な運動形態や場の不均一性のため立式は容易ではない。このため“遅れ距離” δ の概念を導入し局所流砂量を次式のように表す。

$$\frac{q_x}{\sqrt{sgd^3}} = \Phi \{ \tau_* (x - \delta) \} \quad (14)$$

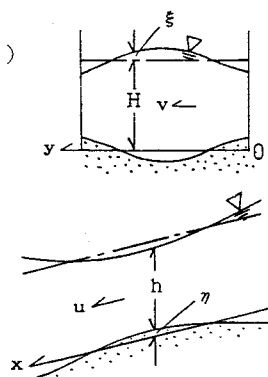


図 - 2

$$\widetilde{q}_x = \alpha_5 \widetilde{\tau}_x (x^* - \widetilde{\delta}) \quad , \quad \alpha_5 = \frac{\tau_*}{\Phi} \frac{d\Phi}{d\tau_*} \quad (15)$$

$$\widetilde{q}_y = \widetilde{v} - \alpha_4 \frac{\partial \widetilde{\eta}}{\partial y^*} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\tau_* c}{\tau_*} \frac{\mu}{\mu_c}} \quad (16)$$

ここに、 $\widetilde{\delta} = \delta/H$ は無次元遅れ距離である。

δ は砂粒の平均移動距離に近似的に等しいと考え $\delta = \lambda$ とし、 λ は Einstein による半理論式を用い、次式で表す。

$$\lambda = 100 d \{1 - \exp(-0.391/\tau_*)\}^{-1} ; \tau_* > \tau_c \quad (17)$$

3. 河床の不安定解析

河床形状を次式のように表す。ただし、 $C = C_r + i C_i$ は河床の無次元複素移動速度である。

$$\widetilde{\eta} = \eta_0 e^{ik(x^* - ct^*)} \cos(\ell y^*) \quad (18)$$

すると、 $\widetilde{u}$ 、 $\widetilde{v}$ 、 $\widetilde{\xi}$ について次式で表される。

$$\widetilde{u} = \hat{u} e^{ik(x^* - ct^*)} \cos(\ell y^*) \quad (19)$$

$$\widetilde{v} = \hat{v} e^{ik(x^* - ct^*)} \sin(\ell y^*) \quad (20)$$

$$\widetilde{h} = \hat{h} e^{ik(x^* - ct^*)} \cos(\ell y^*) \quad (21)$$

(18, 19, 20, 21) 式を (7, 8, 9) 式に代入して解くと $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{h}$ と η_0 の比は次式のようになる。

$$\frac{\hat{\xi}}{\eta_0} = \frac{A_1 B_1 C_1 + A_1 B_3 C_2 + A_3 B_1 C_1}{A_1 B_1 C_1 - A_1 B_2 C_2 - A_2 B_1 C_1} \quad (22)$$

$$\frac{\hat{u}}{\eta_0} = \frac{A_3 B_2 C_2 - A_2 B_1 C_1 - A_2 B_3 C_2 - A_3 B_1 C_1}{A_1 B_1 C_1 - A_1 B_2 C_2 - A_2 B_1 C_1} \quad (23)$$

$$\frac{\hat{v}}{\eta_0} = \frac{A_2 B_3 C_1 - A_1 B_2 C_1 - A_1 B_3 C_1 - A_3 B_3 C_1}{A_1 B_1 C_1 - A_1 B_2 C_2 - A_2 B_1 C_1} \quad (24)$$

ただし、 $A_1 = ikF^2 + \alpha_1 I + \varepsilon \ell^2 F^2$ 、 $A_2 = ik - (1 + \alpha_2) I$ 、 $A_3 = (1 + \alpha_2) I$

$B_1 = ikF^2 + I$ 、 $B_2 = -\ell$ 、 $B_3 = -\alpha_3 \ell I$ 、 $C_1 = ik$ 、 $C_2 = \ell$ である。

上記の式から任意の k に対する $\widetilde{h}$ 、 $\widetilde{\xi}$ と $\widetilde{\eta}$ の振幅比と位相のずれが算出される。各フルード数における河床と水面変位の振幅比と k との関係は図-3 のようになる。

次に上式を用いて (10) 式を解くと次式のようになる。

$$C = A_5 \left[\alpha_1 \alpha_5 a_u e^{-ik\delta} - \alpha_2 \alpha_5 (a_\xi - 1) e^{-ik\delta} + \frac{\ell}{ik} a_v + \frac{\alpha_4 \ell^2}{ik} \right] \quad (25)$$

ただし、 $a_u = \frac{\hat{u}}{\eta_0}$ 、 $a_v = \frac{\hat{v}}{\eta_0}$ 、 $a_\xi = \frac{\hat{\xi}}{\eta_0}$

これより無次元増幅率 kC_i および無次元移動速度 C_r が算出される。

式 (18) の式形から明らかなように、擾乱の振幅は > 0 において時間とともに増大し (不安定)、 $kC_i < 0$ のとき時間とともに減衰し (安定)、 $kC_i = 0$ のとき変化しない (中立)。

4. 解析結果

1981年8月当時、三角波が発生した豊平川の河床勾配は、発生場所付近で $1/150$ 程度であった。以後の解析では全て $I = 1/150$ として計算を行う。同様にフルード数は 1.0 前後と推定され $F = 1.0$ 付近についてのみ解析を行った。

図-5をみると、微小な河床擾乱に対して水面の変位が十分大きくなるがわかる。

河床擾乱の不安定領域は式(25)から求めることができる。まず $\ell = 0.4$ の場合について F を与え $k-\ell$ 相関面上に不安定領域を求めると図-4、5のようになる。実線の内側の陰影を施した部分が不安定領域であり、領域内の実線は移動速度の符号が変わる点である。この図には記していないが、 $k-\ell$ の微小部分ではこれまでの解析で示された通りの閉じた不安定領域が確認できた。この図より、ある波数 k をとると m の値が違ふ複数の ℓ の共存が認められる。次に $\ell = 0.4, 0.8$ の場合について $k-F$ 相関面上に不安定領域を求めると図-6、7のようになる。それぞれの領域は $F = 1.0$ 近辺でほぼ共通であり、これら2つの波が同時に起こり得る可能性が確認された。

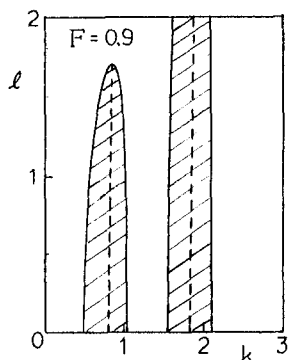


図-4

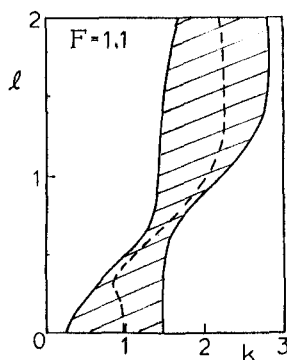


図-5

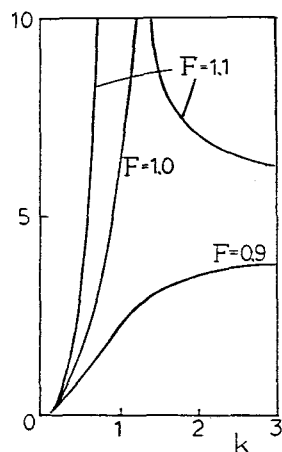


図-3

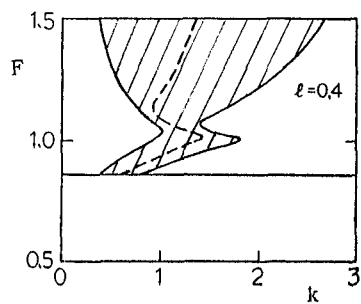


図-6

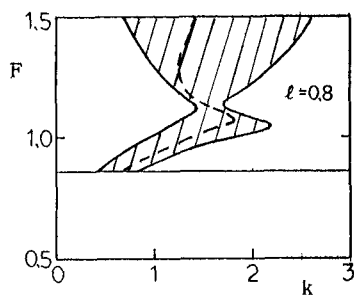


図-7

<参考文献>

- 1) 北海道開発局建設部河川計画課、北海道土木部河川課：水害、北海道開発協会、1981.
- 2) 黒木幹男、岸力：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、土木学会論文報告集第342号、1984.
- 3) 黒木幹男、石井千万太郎、板倉忠興：砂州波高に関する理論的研究、水工学論文集第36巻、1992.