II－9

水面形に合わせた座標系による孤立波解

北海道大学　大学院　学生員　森平　宏治
北海道大学　工学部　正　員　森　　明巨
北海道大学　工学部　正　員　板倉　忠興

１．はじめに

昭和５８年の豊平川の出水では大波高の三角波が発生した。この波の性質を明らかにする必要がある。波高は、河床波の幾何形状に強く依存するが、フルード数が１前後では平坦床でも大きな水面波が発生する。

孤立波の理論では、フルード数Ｆ＝１．２５で砕波するが、実験によると側壁と河床の境界層の相互干渉によってこれ以上のフルード数下においても、高波高・非砕波の波状跳水が形成されることがわかった。この様な波の性質を調べるために、まず高波高の孤立波理論が必要である。

しかし、Ｅ．Ｖ．Ｌａｉｔｏｎｅ[1)]の孤立波理論による近似解では、この様なフルード数では圧力分布の非静水圧からのずれが著しく大きくなり、うまく表現することができない。

本研究では、研究の第一歩としてテンソル解析を応用し、水面形に合わせた座標系を用いたときの水面決定方程式を導いた。

解析は、連続式．Ｕ，Ｖの運動方程式の３本をテンソル方程式で表して摂動展開を行う。

２．基礎式（テンソル方程式）の誘導

テンソル方程式（オイラーの方程式）は、

連続式：$v^i{}_{;i}=0 \leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}\,v^i)_{,i}=0$

運動方程式：$v^j v^i{}_{,j}+\begin{Bmatrix} i \\ m\,j \end{Bmatrix} v^m v^j=-\dfrac{1}{\rho} g^{ij} p_{,j}$

である。ここに、ρ は密度、pは圧力と重力ポテンシャルを合わせたものを示す。g_{ij} は計量テンソル、g^{ij} は共役計量テンソルであり次式で計算される。

計量テンソル ： $g_{ij}=\dfrac{\partial y^a}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^a}{\partial x^j}$ ，共役計量テンソル ： $g^{ij}=\dfrac{\partial x^i}{\partial y^a}\dfrac{\partial x^j}{\partial y^a}$

$\begin{Bmatrix} i \\ m\,j \end{Bmatrix}$ はクリストッフェル記号を表し以下のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} i \\ m\,j \end{Bmatrix}=\frac{1}{2} g^{ip}\left(g_{jp,m}+g_{pm,j}-g_{mj,p}\right)$$

座標変換は、それぞれ次のようにした。

$y^1=\lambda x^1$ ，$y^2=h x^2$ （h；水深，λ；半波長）

これは河床を平坦にし、河床で$x^2=0$ ・水面で$x^2=1$ として、孤立波のピークで$x^1=0$ としている。

Analysis of Solitary Wave in Generalized Coordinate Fitting Wave Hight
by Kouji Morihira, Akio Mori, Tadaoki Itakura

このとき、計量テンソルと共役計量テンソル及びクリストッフェル記号は、以下に示すように計算される。

計量テンソル ：
$$g_{11}=\lambda^2+(h_{,1}x^2)^2,\quad g_{12}=g_{21}=hh_{,1}x^2,\quad g_{22}=h^2 \quad\Rightarrow\quad g=\lambda^2h^2,\ \sqrt{g}=\lambda h$$

共役計量テンソル ：
$$g^{11}=\frac{1}{\lambda^2},\quad g^{12}=g^{21}=\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y^1}x^2\right),\quad g^{22}=\left(-\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y^1}x^2\right)^2+\frac{1}{h^2}$$

クリストッフェル記号 ；
$$\begin{Bmatrix}1\\1\ 1\end{Bmatrix}=0,\ \begin{Bmatrix}1\\1\ 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\2\ 1\end{Bmatrix}=0,\ \begin{Bmatrix}1\\2\ 2\end{Bmatrix}=0$$
$$\begin{Bmatrix}2\\1\ 1\end{Bmatrix}=\frac{h_{,11}}{h}x^2,\ \begin{Bmatrix}2\\1\ 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\2\ 1\end{Bmatrix}=\frac{h_{,1}}{h},\ \begin{Bmatrix}2\\2\ 2\end{Bmatrix}=0$$

以上から連続式は、

$$(hv^1)_{,1}+hv^2_{,2}=0$$

運動方程式は、

x^1方向 ： $$v^1v^1_{,1}+v^2v^1_{,2}=-\frac{1}{\rho\lambda^2}p_{,1}+\frac{h_{,1}x^2}{\rho\lambda^2h}p_{,2}$$

x^2方向 ： $$v^1v^2_{,1}+\frac{h_{,11}}{h}x^2v^1v^1+2\frac{h_{,1}}{h}v^2v^1+v^2v^2_{,2}=\frac{h_{,1}x^2}{\rho\lambda^2h}p_{,1}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{h_{,1}x^2}{\lambda h}\right)^2p_{,2}-\frac{1}{\rho h^2}p_{,2}$$

となり、これを摂動法により解く。以下では簡単のために $x^1\Rightarrow x$ ， $x^2\Rightarrow y$ で置き換える。

摂動パラメーターには、

$$\sigma=\frac{d}{\lambda}$$ （d ；平均水深、λ ；半波長）

をとり、無次元化を次のように行うと、

$$U=\frac{\lambda}{U_\infty}v^1,\ V=\frac{\lambda}{U_\infty}v^2,\ P=\frac{p}{\rho U_\infty^2}$$

連続式は、

$$(HU)_{,1}+HV_{,2}=0 \quad -（1）$$

運動方程式は、

$$U_{,1}U+U_{,2}V=-P_{,1}+y\frac{H_{,1}}{H}P_{,2} \quad -（2）$$

$$\sigma^2V_{,1}U+\sigma^2y\frac{H_{,11}}{H}U^2+2\sigma^2\frac{H_{,1}}{H}VU+\sigma^2V_{,2}V=\sigma^2y\frac{H_{,1}}{H}P_{,1}-\frac{1}{H^2}P_{,2}-\sigma^2\left(y\frac{H_{,1}}{H}\right)^2P_{,2} \quad -（3）$$

となる。

これらを解くための条件は以下のようである。
河床及び水面での境界条件は；V（y=0）＝V（y=1）=0であり、（1）式より

$$V=-\frac{1}{H}\left[H\int_0^y U\,dy\right]_{,1}$$

とおけば、この条件は満たされる。

圧力は水面で0であるから、Pは水面で；$P(x,1)=\frac{GHd}{U_\infty^2}=\frac{H}{F^2}$となる。

流量の条件は、；$q=\int_0^1 U\,dy=\int_0^h \frac{v^1\lambda}{U_\infty}\frac{dy^2}{h}=\frac{q}{U_\infty h}=\frac{U_\infty d}{U_\infty h}=\frac{1}{H}$

である。

3．水面形方程式の誘導

・0次のオーダーは、

$$(HU_0)_{,1}+HV_{0,2}=0 \quad -(5)$$

$$U_{0,1}U_0+U_0V_0=-P_0+y\frac{H_{,1}}{H}P_{0,2} \quad -(6)$$

$$P_{0,2}=0 \quad -(7)$$

0次解に等流を与えると、

$$U_0=\frac{1}{H}\ ,\ V_0=0\ ,\ P_0=\frac{H}{F^2} \quad -(8)$$

ただし、これはH＝1（x=∞）としないと（6）式を満たされないが次のオーダーへ進める。

・2次のオーダーは、

$$(HU_1)_{,1}+HV_{1,2}=0 \quad -(9)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{U_0^2}{2}+P_0\right)_{,1}+(U_0U_1+P_1)_{,1}=y\frac{H_{,1}}{H}P_{1,2} \quad -(10)$$

$$y\frac{H_{,11}}{H}U_0^2-y\frac{H_{,1}}{H}P_{0,1}-\frac{1}{H^2}P_{1,2}=0 \quad -(11)$$

（11）式より

$$P_1=\frac{y^2-1}{2}\left(\frac{HH_{,1}{}^2}{F^2}-\frac{H_{,11}}{H}\right)=\frac{y^2-1}{2}A$$

（10）式より

$$U_0U_1=y^2\left[\int\frac{H_{,1}}{H}A\,dx-\frac{A}{2}\right]+\frac{A}{2}+\frac{\delta E}{\sigma^2}\ ,\ \delta E=E_\infty-E_0\ ,\ E_0=\frac{1}{2H^2}+\frac{H}{F^2}$$

これをyで河床から水面まで積分すると次式が得られる。

$$\int\frac{H_{,1}}{H}\left(\frac{HH_{,1}{}^2}{F^2}-\frac{H_{,11}}{H}\right)dx+\left(\frac{HH_{,1}{}^2}{F^2}-\frac{H_{,11}}{H}\right)+3\frac{\delta E}{\sigma^2}=0\ ,\ E=\frac{H}{F^2}+\frac{1}{2H^2} \quad -(12)$$

このことから、ルトンの近似解では非回転の条件を入れていたが、この条件がなくてもHを表現できることがわかる。

４．参考文献

１）Ｅ．Ｖ．Ｌａｉｔｏｎｅ：Ｔｈｅ　ｓｅｃｏｎｄ　ａｐｐｒｏｘｉｍａｔｉｏｎ　ｔｏ　ｃｎｏｉｄａｌ　ａｎｄ　ｓｏｌｉｔａｒｙ　ｗａｖｅｓ　，ｊ．Ｆｌｕｉｄ　Ｍｅｃｈ．ｖｏｌ．９，１９６１

２）森　明巨・板倉忠興・森平宏治・高田修二：跳水と境界層の相互干渉　－　三次元波状跳水，水工学論文集　第３６巻，１９９２．２

３）森　明巨：波状跳水に関する実験的研究，北海道大学委託研究報告，１９９２．３

４）横道英雄：工学系のためのテンソル解析，技報堂出版，１９８３

５）山田　正：数式処理言語（ＲＥＤＵＣＥ）を用いたナビエ・ストークス方程式の一般化座標への変換，土木学会論文集Ｎｏ．４３４／Ⅱ－１６，ｐｐ．７７－８０，１９９１．８

６）Ａｌｉ　Ｈａｓａｎ　Ｎａｙｆｅｈ：ＰＥＲＴＵＲＢＡＴＩＯＮ　ＭＥＴＨＯＤＳ，Ｊｏｈｎ　Ｗｉｌｅｙ　＆　Ｓｏｎｓ，Ｉｎｃ，１９７３