I －63

矩形板の固有値問題の一考察

北海道大学　工学部　正員　三上　隆
北海道大学　工学部　正員　佐伯　昇

１．はじめに

前論文[1)]では、図－１に示すように、x＝０、aで単純支持され、厚さhが一様な矩形板（a×b）が大きさ$\sigma_x{}^0$の一様な面内圧縮応力を受ける場合の固有振動数は、次式によって算定できる事を報告した。

$$\Omega^2{}_{mn}=\overline{\Omega}^2{}_{mn}-\lambda\left(\frac{m}{m_*}\right)^2\overline{\Omega}^2{}_{m*1} \qquad (1)$$

ここで、m、n＝荷重載荷方向およびそれに直角方向の半波数

Ω、$\overline{\Omega}$＝負荷および無負荷時の無次元化固有振動数

m、$\overline{\Omega}_{m*1}$＝Min［$\overline{\Omega}^2{}_{j1}$／（$j^2\pi^2$）］（j＝1，2，・・・）を満たすjと$\overline{\Omega}_{j1}$、

なお座屈係数（k_{cr}）は$k_{cr}=\overline{\Omega}^2{}_{m*1}/m^2{}_*\pi^2$

で与えられる。

λ（0≦λ≦1）＝作用応力と座屈応力の比。

式（１）は、無負荷時の固有振動数方程式、座屈方程式および負荷時の固有振動数方程式の相互の固有値の相似性に着目し求めたものであり、この式の特徴等を再記すれば以下となる。

（１）曲率項を考慮すれば、せん断変形を考慮した等方性板（Mindlin板）や積層板（各層の密度を一定としたときの逆対称アングルおよびクロスプライ積層板）に対しても成立する。

（２）無負荷時の固有振動解析の結果のみより、座屈応力および負荷時の固有振動数の算定が可能である。

（３）固有振動数の２乗$\Omega^2{}_{mn}$は作用応力（λに相当）に比例する。作用応力（λ）の変化に対する$\Omega^2{}_{mn}$の変化率（変動率）は、波数nに依存しない。さらに変化率は波数m＞m_*で大きく、m＜m_*で小さい。

（４）非負荷辺の境界条件に無関係に成立する。

本論文は、式（１）と同様な立場から相対する二辺上に周期的圧縮応力が作用する場合の矩形板の動的安定問題を定式化し、その有効性の検討を行ったものである。

２．不安定領域算定式の誘導

矩形板に周期的な面内応力が作用する場合には、面内応力の振幅が静的座屈応力に比して十分小さいときでも、激しい曲げ振動が励起されることがあり、係数励振振動または動的不安定現象としてよく知られている[2)]。

ここでは、安定境界をBolotinによって提案された方法により定めることにして、主不安定領域の算定式を導くことにする。

周期的圧縮応力$\sigma_x{}^0=\sigma_{x,d}$を非周期成分$\sigma_s$と周期成分$\sigma_d$とに分けて次のように表す。

$$\sigma_{x,d}=\sigma_s+\sigma_d\cos\theta t=a\sigma_{cr}+b\sigma_{cr}\cos\theta t \qquad (2)$$

ここで、θ＝圧縮応力の振動数、$a=\sigma_s/\sigma_{cr}$、$b=\sigma_d/\sigma_{cr}$　であり、σ_{cr}は後述する静的な座屈応力である。

さて、x＝０とx＝aで単純支持の条件を満たすLevy型の変位関数を採用し、空間領域yについては何らかの離散化手法により離散化すれば、次の周期係数を有する時間に関する二階連立常微分方程式が得られる。

Study for Eigenvalue Problems of Rectangular Plates
by Takashi MIKAMI and Noboru SAEKI

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[K]\{\delta\}-\delta_{cr}(a+b\cos\theta t)[K_G]\{\delta\}=\{0\} \tag{3}$$

ここで、$\{\delta\}$ は変位係数ベクトル、ドット（・）は時間 t に関する微分、［M］、［K］および［K_G］はそれぞれ、質量、剛性および幾何学的剛性マトリックスである。

安定境界を定めるのにBolotinの方法を用いれば、主不安定領域は、近似的に次の境界振動数方程式より求められる。適当な無次元化を施せば、

$$\left([K^*]-\left(a-\frac{b}{2}\right)k_{cr}[K_G^*]-\frac{1}{4}\Theta^2[M^*]\right)\{A\}=\{0\} \tag{4}$$

$$\left([K^*]-\left(a+\frac{b}{2}\right)k_{cr}[K_G^*]-\frac{1}{4}\Theta^2[M^*]\right)\{B\}=\{0\} \tag{5}$$

ここで、$\{A\}$ と $\{B\}$ は時間に依存しない未知係数を成分とするベクトルであり、Θ と k は次式で与えられる無次元化された圧縮応力の振動数、無次元化された静的な座屈係数である。

$$\Theta^2=\rho\theta^2\frac{a^4}{Eh^2}、\quad k_{cr}=\sigma_x{}^0\frac{a^2}{Eh^2} \tag{6}$$

ただし、ρ＝密度、E＝弾性係数、$\sigma_x{}^0$＝静的な圧縮応力。

前論文[1)]より、質量マトリックス［M^*］と幾何学的剛性マトリックス［k_G^*］の間で成立する関係式、および座屈応力係数 k_{cr} は次式で与えられる。

$$[K_G^*]=m^2\pi^2[M^*] \tag{7}$$

$$k_{cr}=\frac{\overline{\Omega}^2{}_{m*n}}{m_*{}^2\pi^2} \tag{8}$$

式（7）、（8）を用いて、式（4）と式（5）を書き改めれば以下となる。

$$\left([K^*]-\left\{\left(a-\frac{b}{2}\right)\frac{m^2}{m_*{}^2}\overline{\Omega}^2{}_{m*1}+\frac{\Theta^2}{4}\right\}[M^*]\right)\{A\}=\{0\} \tag{9}$$

$$\left([K^*]-\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)\frac{m^2}{m_*{}^2}\overline{\Omega}^2{}_{m*1}+\frac{\Theta^2}{4}\right\}[M^*]\right)\{B\}=\{0\} \tag{10}$$

さて、無負荷の固有振動数方程式は前論文[1)]より

$$\left[[K^*]-\overline{\Omega}^2{}_{mn}[M^*]\right]\{\delta\}=\{0\} \tag{11}$$

と与えられるので、式（11）と式（9）、および式（11）と式（10）の固有値を等値すれば、主不安定領域の境界は次式によって算定できる。

$$\frac{\Theta^2}{4}=\overline{\Omega}^2{}_{mn}-\left(a\pm\frac{b}{2}\right)\frac{m^2}{m_*{}^2}\overline{\Omega}^2{}_{m*1} \tag{12}$$

式（1）と式（12）を比較すれば、明らかなように、主不安定領域の境界は、静的な作用応力と静的な座屈応力の比 λ が $\lambda=a+\frac{b}{2}$、$a-\frac{b}{2}$ の負荷時の固有振動数を求めればよいことになる。

3．数値計算例

以下に四辺単純支持された等方性正方形板の（m，n）＝（1、1）、（2，1）、（1、2）に対する主不安定領域を示す。このときの無負荷時の固有振動数は、$\overline{\Omega}_{11}$＝5．973，$\overline{\Omega}_{12}=\overline{\Omega}_{21}$＝14．933であり、静的な座屈応力係数を与える波数 m_* は1である。なお、ポアソン比 ν は0．3とした。

図－2にはa（$=\sigma_s/\sigma_{cr}$）＝0、b（$=\sigma_d/\sigma_{cr}$）を変化させたときの主不安定領域を示す。縦軸は Θ と無負荷時の最小固有振動数 $\overline{\Omega}_0$（$=\overline{\Omega}_{11}$）の比であり、横軸はbである。同様に図－3にはa＝0．5と一定にし、bを変化させたときの主不安定領域を示す。いずれの結果も厳密解とほぼ一致しており、式

（１２）の有効性がわかる。

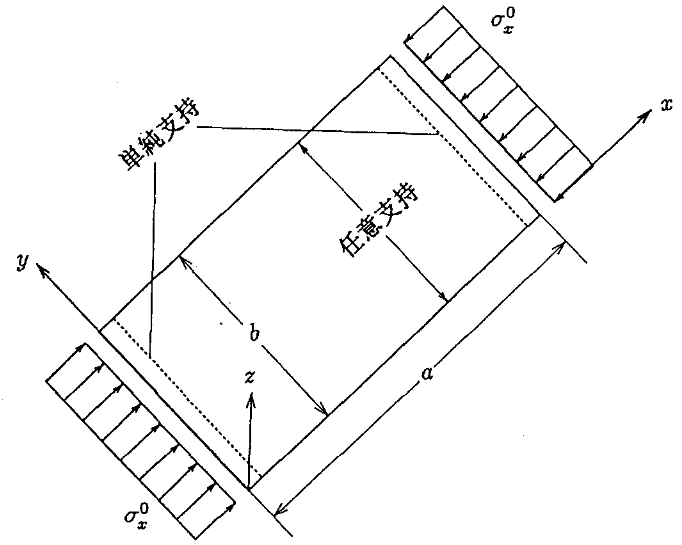
4．まとめ

本論文では、相対する二辺上に一様分布の静的および周期的圧縮荷重が作用する矩形板の動的安定問題を取り上げ、Bolotin によって提案された安定境界の算定法に基づき、主不安定領域の境界算定式を提示した。算定式は無負荷時の固有振動数のみで表わされており、振動数データを集積した設計ハンドブック的な資料が手元にあれば、不安定領域は容易に求められる。

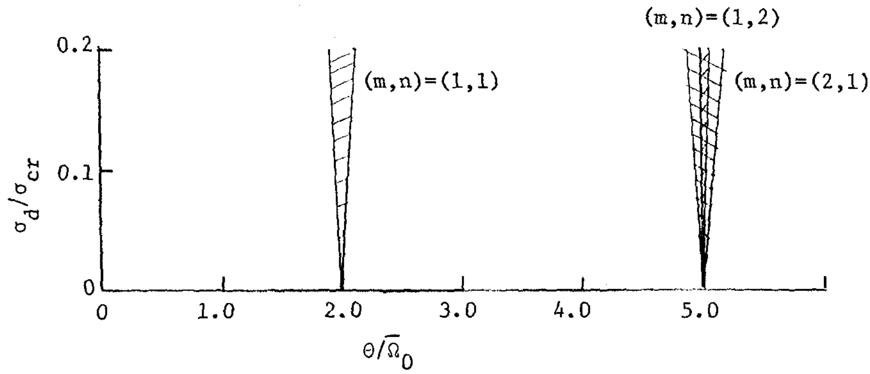
参考文献

1) 三上隆:矩形板の座屈・振動問題における固有値の相似性、土木学会北海道支部論文集、第48号、p 227、1992

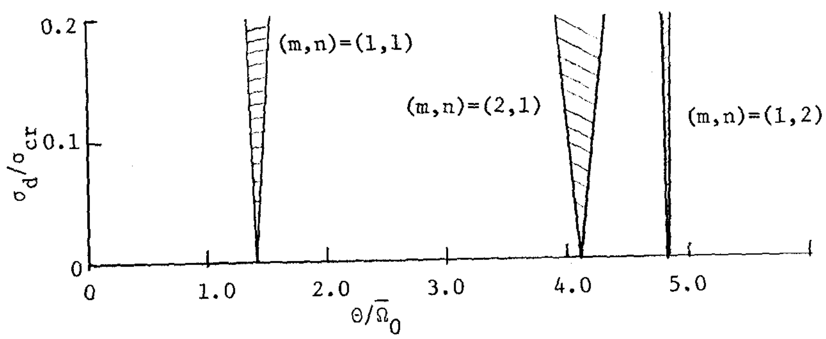
2) Bolotin, v. v:The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day. inc., 1964



図－１　周期面内力を受ける矩形板



図－2　主不安定領域（ρ_s/ρ_{cr}＝0）



図－3　主不安定領域（ρ_s/ρ_{cr}＝0．5）