

I-62

非線形振動論によるせん断振動体の不安定現象の解析

北見工大 正員 大島 俊之
永代 E 同 井上 聖
ズコーシャ 日下田貴男
同 正員 葛西 隆一

1. まえがき

本研究では、粒状体地盤など非線形応答特性を有する層状体を対象として非線形振動応答解析を行ない、せん断振動体の不安定性について検討する。このような地盤の非線形応答特性の研究についてはこれまでいくつかの例^{(1)~(6)}が見られるが、その中で 香川⁽⁴⁾は、地盤振動の非線形性の程度は入力加速度の大きさや拘束圧力に影響されることを示している。また片田ら⁽⁵⁾は、飽和砂層の液状化過程における非線形応答特性、即ち飽和砂層の復元力特性は加振時の間隙水圧の変化に依存することを予測するとともに、実測結果が不足していることを指摘している。一般にこのような粒状体地盤の非線形性の程度は振動応答曲線の傾きにより判定できる。木田ら⁽⁶⁾は色部誠博士の実験結果などを参照して理論的な解析を行なっている。

このような研究の目的は、地盤の液状化にみられるようにバネ軟化型応力ひずみ関係を原因とする非線形効果により地盤振動が不安定性を示すので、将来的にはこのような粒状体地盤の改良をどのようにすれば不安定性を減少できるかを検討することにある。

2. 地盤バネ効果の非線形性について

文献⁽⁶⁾に示されているように、砂のせん断振動実験においては入力加速度レベルに応じて図1に示するようなバネ軟化型の非線形応答特性がみられる。したがって一般に粒状体材料においては、図2に示すように線形バネ効果より非線形バネ効果として取り扱う方が適切な場合もある。そこで本研究では図3に示すようなバネ軟化型のVoigtモデルを採用して検討する。この場合応力ひずみ関係は次式であらわされる。

$$\tau = G \left[\gamma - \frac{\gamma^3}{3\gamma_1^2} \right] + G' \gamma' \quad (1)$$

ここに γ_1 は、図2(b)において τ_{max} が生じる時のせん断ひずみである。

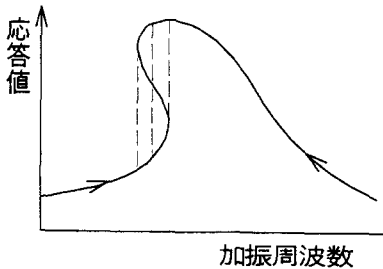
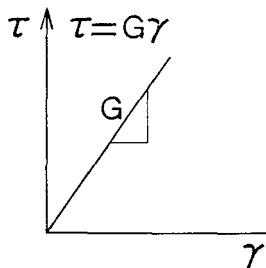
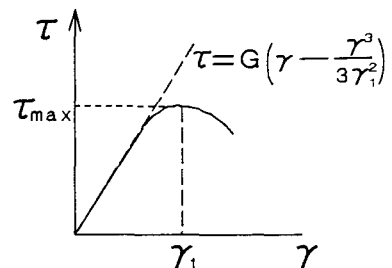


図1 バネ軟化型非線形応答



(a) 線形バネ



(b) バネ軟化型非線形バネ

図2 地盤バネ効果の特性

Analysis of Unstable Phenomena of a Shear-oscillating Body by Nonlinear Oscillation Theory
by Toshiyuki OSHIMA, Masaru INOUE, Takao HIGETA and Ryuichi KASAI

3. 非線形Voigtせん断振動体の方程式

図4を参照して深さ ℓ のせん断振動体の水平方向の動的つりあいは

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} dx = \rho (\ddot{u} + p) dx \quad (2)$$

ただし ρ は密度、 $\ddot{u}$ は振動体の水平方向加速度、 p は加振加速度である。

また水平変位 u の深さ方向の分布は一般に

$$u = \sum_m U_m \sin \frac{m\pi}{2\ell} x \quad (3)$$

と展開できるが、本研究ではこのうち最低次モードのみを対象として

$$u = U_1 \sin \frac{\pi x}{2\ell} \quad (4)$$

と仮定する。また高次モードの影響は相対的に小さいことが文献²⁾で示されている。以上より $\tau = \partial u / \partial x$ を考慮し、式(4)、式(1)を式(2)に代入し、 x について0から ℓ まで積分すると底面せん断ひずみ γ_0 に関する非線形Voigtせん断振動体の運動方程式がDuffing型方程式として次のように求まる。

$$m \ddot{u}^* + 2\mu^* \dot{u}^* + k_1^* u^* + \alpha k_3^* u^{*3} = F_p(t) \quad (5)$$

ただし $m = \rho \left[\frac{2\ell}{\pi} \right]^2$ 、 $u^* = \gamma_0$ 、 $2\mu^* = G'$ 、

$$k_1^* = G, \quad k_3^* = \frac{G}{3\gamma_1^2}, \quad \alpha = -1,$$

$$F_p(t) = -\rho p \ell$$

また加振力 $F_p(t)$ としてここでは

$$F_p(t) = F^* \cos \omega^* t^* \quad (6)$$

とする。

また式(5)を次のように無次元化することができる。

$$\ddot{u} + u + 2\bar{\mu} \dot{u} + \alpha \varepsilon u^3 = F \cos \omega t \quad (7)$$

ただし $t = \frac{t^*}{T^*}$ 、 $T^{*2} = \frac{m}{k_1^*}$

$$\omega = \frac{\omega^*}{\omega_0}, \quad \omega_0 T^* = 1, \quad \omega = \omega^* T^*$$

$$u = \frac{u^*}{U^*}, \quad \varepsilon = \frac{k_3^* T^{*2} U^{*2}}{m} = \frac{k_3^* U^{*2}}{k_1^*}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^*}{\sqrt{m k_1^*}}, \quad F = \frac{F^*}{k_1^* U^*}, \quad \alpha = -1$$

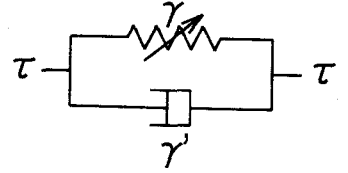


図3 バネ軟化Voigtモデル

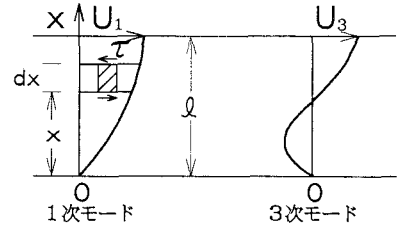


図4 せん断振動モード

4. 弱い非線形振動の摂動法による周波数応答の解法

式(6)あるいは式(7)の非線形振動方程式の解析においては外力レベルの大きさ、非線形項の効果の大きさ、減衰効果の大きさ、無次元化振動数の大きさなどにより解析結果が大きく異なる。⁷⁾ここではそのうち、弱い非線形振動(Weak Nonlinear Oscillation)を対象としてPrimary Resonance ($\omega \approx 1$) 近傍の周波数応答特性を摂動法(Perturbation Method)により解析した結果について述べる。

即ち解析上の仮定として、共振点近傍では

$$F = \varepsilon f, \quad \bar{\mu} = \varepsilon \mu, \quad \varepsilon \ll 1$$

のように外力レベルおよび減衰効果が小さいものとする。解形式として摂動法により

$$u(t, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (8)$$

また一般解として

$$u = a \cos(t + \beta) + \dots \quad (9)$$

の形式をとるものとする。ただし a は振幅、 β は位相遅れを意味する。

Multiple Scale $T_n = \varepsilon^n t$ ($n=0, 1, 2, \dots$)を用いると、摂動法のSecular termを消去するため次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a' &= -\mu a + \frac{1}{2} f \sin \gamma \\ a \beta' &= \frac{3}{8} \alpha a^3 - \frac{1}{2} f \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし $\omega = 1 + \varepsilon \sigma$ 、 $\gamma = \sigma T_1 - \beta$

次に図1にみられるように加振周波数に応じて応答値に非線形性がみられ、また不安定性(発散)が発生するので、せん断振動体が安定領域にとどまるためには振幅 a および位相 γ の時間変化 a' および γ' が生じないものとして

$$a' = 0, \quad \gamma' = 0 \quad (11)$$

とすると(Fixed Point)

$$\mu^2 a^2 + \left[\sigma a - \frac{3}{8} \alpha a^3 \right]^2 = \frac{1}{4} f^2 \quad (12)$$

のように周波数応答関数が求められ、その解の一般的傾向は図5のようになる。この結果の物理的な意味は、式(11)より振動体がStable(安定)になる時の加振振動数と振幅の組み合わせ(解)が一つの曲線を形成することを意味しているとともに、三つの解が存在する場合は上下の解をNode、中間の解をSaddle Pointと呼び、重根になる場合をBifurcation Pointと呼ぶ。

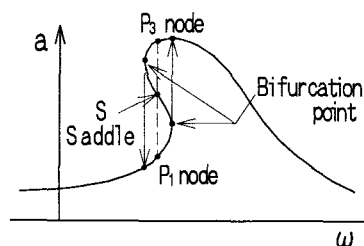


図5 非線形周波数応答特性

5. 解析結果

(1) 周波数応答特性

図6には、無次元化加振振幅 $f = 0.2$ の場合に、無次元化減衰定数 μ を 0.01 、 0.09 、 0.12 と変化させた時の応答結果を示しており、減衰定数が大きくなるとともに非線形性が小さくなっている状況がわかる。

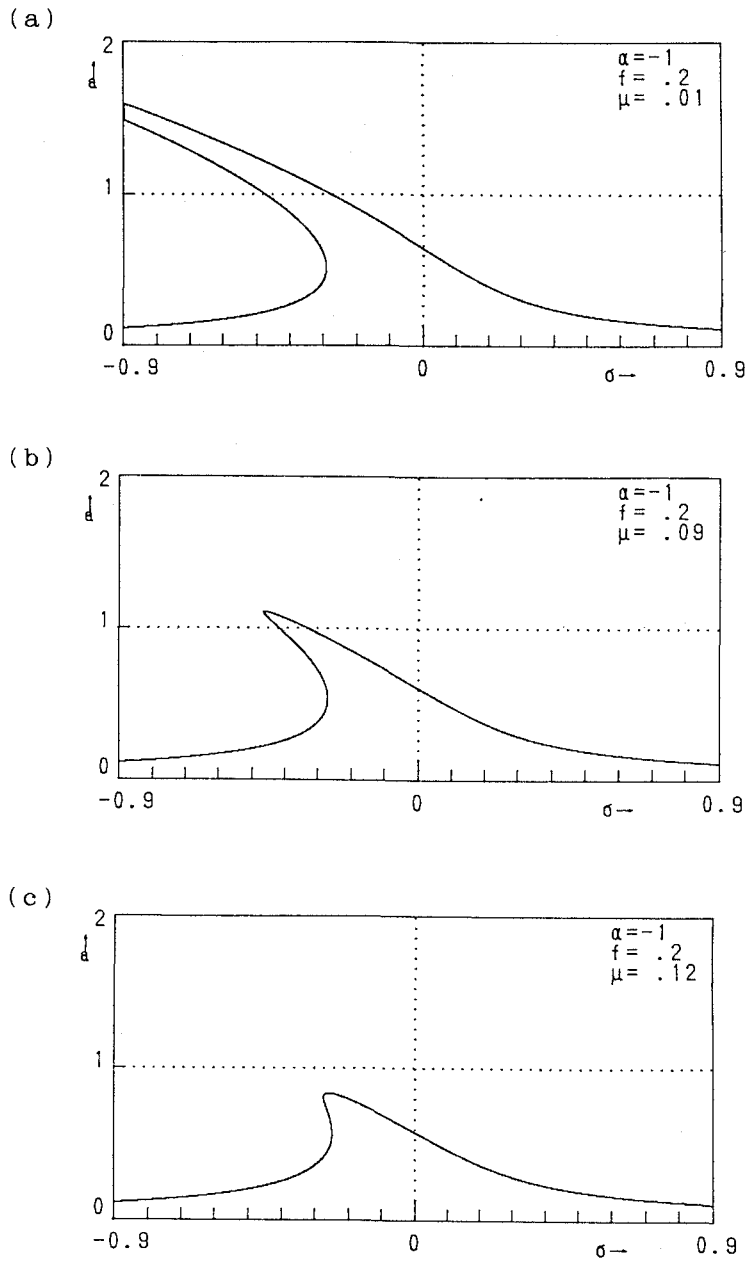


図6 周波数応答結果

(2) 初期条件による安定領域の変化

式(6)および式(7)は時間に関する2階常微分方程式であり、Runge-Kutta-Gill法により、初期条件を与えて直接応答を求めることができる。図7には、この初期条件のちがいによって振動体のStable(安定)領域がどのように変化するかを調べた結果を示している。図の横軸は初期変位、縦軸は初期速度を示しており、白い領域は安定領域、黒い領域は不安定領域を示している。ここでは縦横 300×300 の相異なる初期条件の組み合わせについて計算している。この結果は、無次元化減衰定数 $\mu = 0.1$ 、無次元化加振周波数 $\omega = \pi/8$ 、 $\varepsilon = 0.05$ についての結果で、無次元化加振振幅 f を図7(a)、(b)、(c)の順に0.05、0.25、0.35と大きくした場合に安定領域の変化をあらわしている。これらの安定領域が複雑になればカオス(Chaos)と呼ばれており、これらはいわばカオスへの入口である。

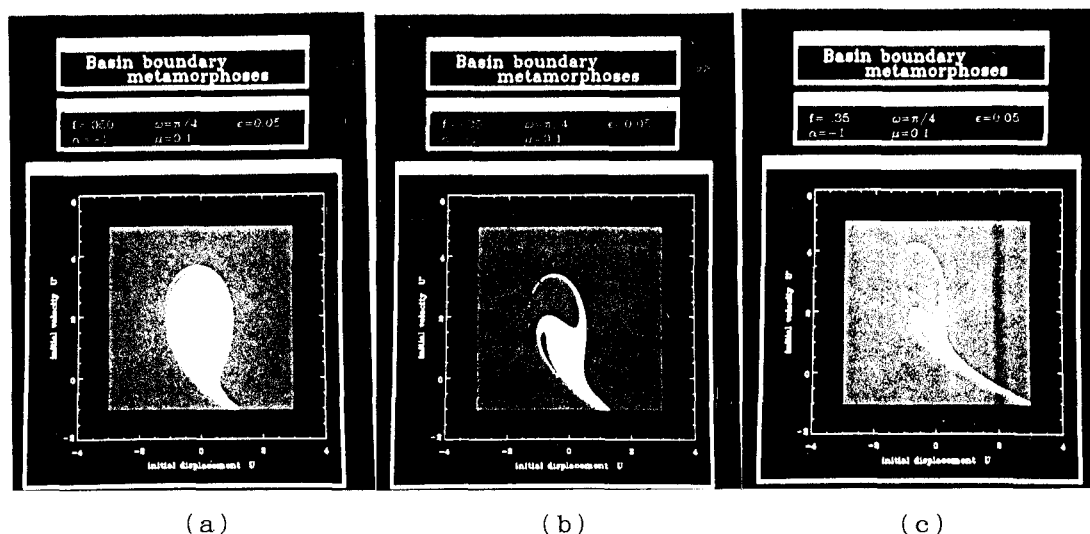


図7 初期条件による安定領域の変化

6. あとがき

非線形Voigtせん断振動体を対象としてDuffing型非線形振動方程式により、非線形振動特性について述べた。ここで示した結果は紙数の関係で一部であるが、興味ある結果が種々得られている。

本研究の結果を粒状体による非線形振動の制御に応用するには実験による検証など多くの残された課題があり、本研究はその第一歩と言える。本研究の計算においては市川和洋氏(現(株)中部)の援助を受けました。ここに感謝いたします。

参考文献

- 1) 能町、木田、沢野：非線形フォークト体のせん断振動について，土木学会第41回年次学術講演会概要集，第I部，1986
- 2) 能町、木田、阿部、横江：非線形振動における高調波共振の影響，土木学会第42回年次学術講演会，第I部，1987
- 3) 大島、日下田、葛西、三上：非線形せん断振動体の不安定特性に関する研究，土木学会第47回年次学術講演会，第I部，1992
- 4) 香川崇章：地盤モデルとしての砂層の振動性状について，土木学会論文報告集，第275号，1978
- 5) 片田、板谷、勝田：飽和砂層を含む多層地盤の実復元力を用いた非線形波動解析，土木学会論文集，第356号/I-3，1985
- 6) 木田、能町、阿部、沢野：非線形フォークト層体のせん断振動応答，構造工学論文集，Vol. 34A，1988
- 7) A. H. Hayfeh, D. T. Mook: Nonlinear Oscillations, 1979