

I-59

EK-WLI-FEMによるパラメータ同定

(株)地崎工業 正会員 須藤 敦史
武蔵工業大学 正会員 星谷 勝

1. はじめに

地盤や構造物のシーケンシャルな動特性同定や静的なパラメータ同定において、対象システムを非線形状態方程式と観測方程式に分離し、基準軌跡において観測方程式を線形化する拡張カルマンフィルタ¹⁾⁻²⁾を用いた研究が行われている。

拡張カルマンフィルタを用いた動的なパラメータ同定では、状態方程式に対象とする運動方程式と同定パラメータを同時に組み込み、状態ベクトルを順次修正をしながら同定を行うものである³⁾⁻⁵⁾。

また静的なパラメータ同定では、状態方程式中の状態ベクトルを未知パラメータだけとし、その定常性を仮定している。そして、対象システムの構造方程式などの関係式は、観測方程式中に記述している⁶⁾⁻⁸⁾。

一方、地盤の静的な応力、変形解析や動的なシミュレーション解析において、有限要素法や境界要素法などの数値離散化手法を用いた解析が広く用いられており、このうち有限要素法は非線形問題を扱うことができ、解析対象領域が不均質な場合や複雑な形状を有する場合に適した解析手法であると言われている。しかし有限要素法による地盤の数値解析では、必要な地盤定数を正確に与えることが難しいことなどから、信頼性の高い予測解析が困難となることが多い。

実際の地盤において地盤定数は空間的に分布する値であり、その値は不均質性を有するものと考えられている。また物性値試験より得られる値や観測データは、観測誤差等のばらつきを含む値である。

そこで本研究では、観測データをベイズ理論により確率論的に取り扱い地盤定数の事前分布を更新し事後分布を推定する拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを用いた手法(EK-WLI法)⁹⁾と有限要素法を組み合わせたEK-WLI-FEMにおけるパラメータ同定への適応性について検討を行っている。

2. 拡張カルマンフィルタ

拡張カルマンフィルタは、非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本式として構成したものである。

$$d\mathbf{X}t/dt = \mathbf{f}(\mathbf{X}t, t) + \mathbf{G}t\mathbf{w}t \quad (1)$$

$$\mathbf{Y}t_k = \mathbf{h}(\mathbf{X}t_k, t_k) + \mathbf{v}t_k \quad (2)$$

この拡張カルマンフィルタの基本式に対するアルゴリズムは、非線形の状態方程式と観測方程式を基準軌跡のまわりにTaylor展開し線形化し、カルマンフィルタのアルゴリズムに代入して構成されたものである。式(1)は状態ベクトルの時間的遷移を、式(2)は状態ベクトルと観測ベクトルの関係を示している。また雑音ベクトルは、正規性のホワイトノイズである。

$$E[\mathbf{w}t_k] = 0, E[\mathbf{w}t_k \mathbf{w}t_s^T] = \mathbf{Q}t_k \delta t_{ks} \quad (3)$$

$$E[\mathbf{v}t_k] = 0, E[\mathbf{v}t_k \mathbf{v}t_s^T] = \mathbf{R}t_k \delta t_{ks} \quad (4)$$

δt_{ks} : クロネッカデルタ

$\mathbf{Q}t_k, \mathbf{R}t_k$: システムおよび観測雑音の分散マトリクス

拡張カルマンフィルタのアルゴリズムを以下に示す。

$$\hat{\mathbf{X}}(t_{k+1} | t_k) = \hat{\mathbf{X}}(t_k | t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}[\hat{\mathbf{X}}(t | t_k), t] dt \quad (5)$$

$$\mathbf{P}(t_{k+1} | t_k) = \phi[t_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{X}}(t_k | t_k)] \mathbf{P}(t_k | t_k) \phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{\mathbf{X}}(t_k | t_k)] + \Gamma^T t_k \mathbf{Q} t_k \Gamma t_k \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{\mathbf{X}}(t_{k+1} | t_k) + \mathbf{K}[t_{k+1}; \hat{\mathbf{X}}(t_{k+1} | t_k)] \times [\mathbf{Y}t_{k+1} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{X}}(t_{k+1} | t_k), t_{k+1})] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P(t_{k+1} | t_{k+1}) &= [I - K \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\}] M \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} \\ &\times P(t_{k+1} | t_k) [I - K \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\}] M \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\}^T \\ &+ K \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} R t_{k+1} K^T \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} K \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} &= P(t_{k+1} | t_k) M^T \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} \\ &\times [M \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} P(t_{k+1} | t_k) \\ &\times M^T \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\} + R t_{k+1}]^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、

$\hat{X}(t_k | t_k)$: Y_{t_k} が得られた時の t_k 時間における推定状態ベクトル (最適推定値)

$P(t_k | t_k)$: $\hat{X}(t_k | t_k)$ と真値 X_{t_k} との差の共分散行列

$\hat{X}(t_{k+1} | t_k)$: Y_{t_k} が得られた時の t_{k+1} 時間における推定状態ベクトル

$P(t_{k+1} | t_k)$: $\hat{X}(t_{k+1} | t_k)$ と真値 $X_{t_{k+1}}$ との差の共分散行列

$K \{t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1} | t_k)\}$: t_{k+1} 時間でのフィルタゲイン行列

Y_{t_k} : $\{y_{t_1} \dots y_{t_k}\}$, I : 単位行列

このアルゴリズムは、式(5), (6)の予測アルゴリズムと式(7)~(9)のカルマンゲインによるフィルタリングアルゴリズムより構成される。

アルゴリズム中の変換行列 $M \{t_k; \hat{X}(t_k | t_{k-1})\}$ と $\phi [t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k | t_k)]$ は、

$$M \{t_k; \hat{X}(t_k | t_{k-1})\} = \left[\frac{\partial h_1(X t_k, t_k)}{\partial X_j} \right] X t_k = \hat{X}(t_k | t_{k-1}) \quad (10)$$

$$\phi [t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k | t_k)] = I + \Delta F [t_k; \hat{X}(t_k | t_k)] \quad (11)$$

$$F [t_k; \hat{X}(t_k | t_k)] = \left[\frac{\partial f_1(X t, t)}{\partial X_j} \right] X t = \hat{X}(t_k | t_k) \quad (12)$$

Δ : 時間刻み

$h_1(X t_k, t_k)$: $h(X t_k, t_k)$ の要素

$f_1(X t, t)$: $f(X t, t)$ の要素

X_j : $X t$ または $X t_k$ の要素

上記アルゴリズムに初期状態ベクトル $\hat{X}(t_0 | t_0)$ と初期の推定誤差共分散行列 $P(t_0 | t_0)$ が得られれば、観測ベクトル Y_{t_k} を順次取り込みながら漸次的に最適推定値 (最適状態ベクトル) を求めることができる。

3. EK-WLI-FEM¹⁰⁾

(1) 状態方程式

一般の設計や数値解析では、地盤定数を確定値として用いる場合が多い。しかし、地盤定数は不均質性を有し空間的に分布する値である。また、物性値試験による値は観測誤差などのばらつきを含む値と考えられる。そこで、空間的に分布する地盤定数や測定誤差を評価するため、拡張カルマンフィルタの状態方程式における状態ベクトルやシステムノイズを空間的なばらつきを有する値や試験誤差と仮定して定式化を行う。

ここで、状態方程式中の状態ベクトルを地盤定数とし、かつ測定誤差をシステムノイズ w_t として加えると式(13)のようになる。

$$\hat{X}(t_{k+1} | t_k) = [I] \hat{X}(t_k | t_k) + w_t \quad (13)$$

(2) 観測方程式

一般に、静的な有限要素法の荷重と変位の関係は、次式の剛性方程式で示される。

$$[K] u = f \quad (14)$$

$[K]$: 剛性マトリクス

u : 変位ベクトル

f : 荷重ベクトル

得られる観測量を変位量とすると、変位ベクトルは次式のようにになる。

$$\mathbf{u} = [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{f} \quad (15)$$

また、動的な有限要素法において運動方程式は次式に示される。

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}] \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (16)$$

$[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{K}]$: 質量, 減衰, 剛性マトリクス
 $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$: 応答変位, 速度, 加速度ベクトル
 $\mathbf{f}$: 荷重ベクトル

得られる観測波形が加速度波形のときには、応答加速度ベクトルは次式のようにになる。

$$\ddot{\mathbf{u}} = [\mathbf{M}]^{-1} \{ \mathbf{f} - [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{u}} - [\mathbf{K}] \mathbf{u} \} \quad (17)$$

ここで、拡張カルマンフィルタにおける観測方程式は式(2)に示されるように、観測値は変位量や応答加速度ベクトルに観測雑音を加えた値である。したがって、観測方程式を有限要素法の剛性方程式や運動方程式の形で表すと静的な場合は式(18), (19)、動的な場合は式(20), (21)のようにになる。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) + \mathbf{v} \quad (18)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = [\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{f} \quad (19)$$

$$\mathbf{Y} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) + \mathbf{v} \quad (20)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = [\mathbf{M}]^{-1} \{ \mathbf{f} - [\mathbf{C}] \dot{\mathbf{u}} - [\mathbf{K}] \mathbf{u} \} \quad (21)$$

剛性マトリクス $[\mathbf{K}]$ は状態ベクトルの関数となる。

ここで、対象とする問題は観測値がある時刻において計測され、その計測値より状態ベクトルの推定を行う。

また、EK-WLI法は観測ベクトルに含まれる情報を効率的に抽出するために、得られる観測値において状態ベクトル推定をローカルに繰り返す。したがって、繰り返し計算 t_k は時間に関係ない。

ここで、式(18), (20)を離散表示すると式(22)のようにになる。

$$\mathbf{Y}_{t_k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{t_k}) + \mathbf{v}_{t_k} \quad (22)$$

4. EK-WLI-FEM中の変換行列

拡張カルマンフィルタの変換行列は式(22)を各状態ベクトルで偏微分して得られる。

しかし、状態ベクトルは剛性マトリクス $[\mathbf{K}]$ 中に存在し直接偏微分により求めることは困難である。したがって、変換行列を影響係数法¹¹⁾により近似的に算出する。ここで、影響係数法は状態ベクトルを順次微量変化させ有限要素法の順解析より近似的に求める手法であり、式(23)のように表される。

これにより、EK-WLI-FEMによるパラメータ同定が複雑な偏微分計算を行うことなく可能である。

EK-WLI-FEMにおけるパラメータ同定フローを図-1(a), (b)に示す。

ここで、状態ベクトルの推定は、図-1(a)に示すように初期値 $\hat{\mathbf{X}}_0$, $\mathbf{P}_0$ が与えられると、カルマンフィルタのアルゴリズムにより漸化的に行なわれる。

この時に観測ベクトルは、ある時刻 t_k に得られる観測データを用いて計算を行う。

そして、ローカルな繰り返し2回目以降に推定誤差共分散行列の重み(W)を乗じ、ローカルな繰り返しを ℓ 回行い最適状態ベクトルの推定を行う。

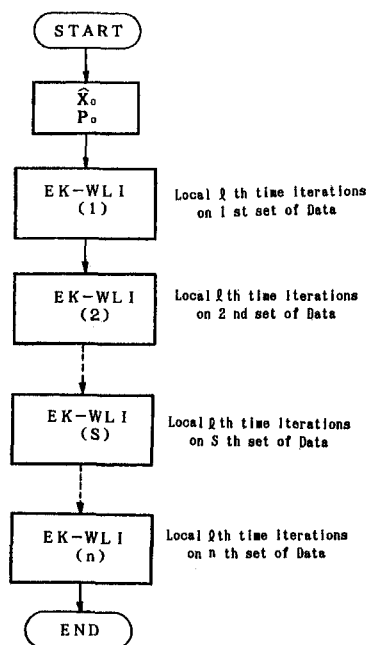


図-1(a) EK-WLI-FEMのパラメータ同定フロー (1)

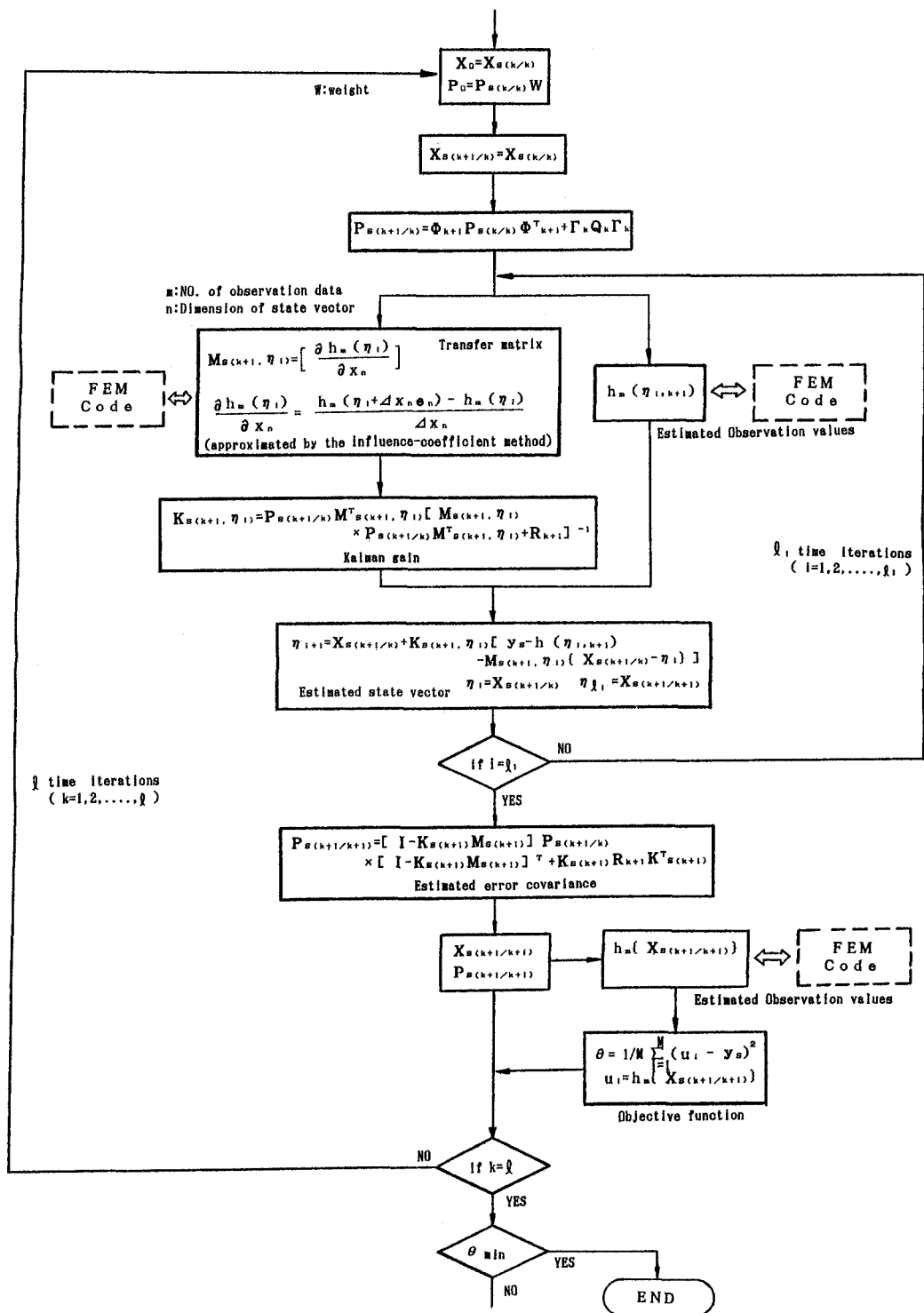


図-1 (b) EK-WLI-FEMのパラメータ同定フロー (2)

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{X}t_k)}{\partial x_j} = \frac{h_i(x_jt_k + \Delta x_j \mathbf{e}_j) - h_i(x_jt_k)}{\Delta x_j} \quad (23)$$

$h_i(x_j)$: $h(\mathbf{X})$ の j 番目の観測点

Δx_j : x_j の微小増分

$\mathbf{e}_j$: j 番目の要素

5. 数値解析例（静的パラメータ同定）

実際の地盤を図-2に示すように三層の定数から成るモデルと仮定し、本手法による未知弾性係数の推定を行う。

ここで、解析に用いる弾性定数は空間的な分布もしくは試験誤差を有するため、弾性係数の平均値に対し1.0%の標準偏差をもつ正規性のノイズをシステムノイズとして与えている。そして、あらかじめ真の弾性係数により変位量を算出し、各観測点変位量の平均値に対し5%の標準偏差をもつ正規性のノイズを観測ノイズとして加えて観測データとしている。

また観測点は、掘削前面の5点とし繰り返し回数は4回で解析を行っている。

このモデルにおける地盤の弾性係数の同定結果を表-1に、また収束過程を図-3示す。

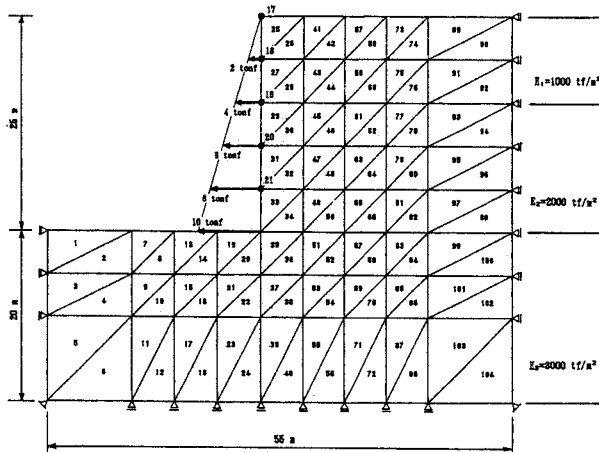


図-2 地盤モデル (1)

表-1 パラメータ同定結果

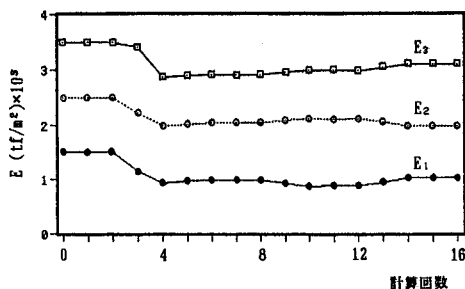


図-3 パラメータ同定結果

回数	E1(1000tf/m²)	E2(2000tf/m²)	E3(8000tf/m²)
0	1500.0	2500.0	3500.0
1	1500.0	2500.0	3500.0
2	1499.4	2499.4	3499.9
3	1153.1	2214.9	3403.8
4	934.1	1978.2	2862.4
5	870.0	2009.0	2889.5
6	983.5	2038.7	2911.2
7	983.2	2039.9	2911.2
8	983.2	2038.9	2911.2
9	924.5	2075.7	2945.9
10	875.9	2106.3	2984.2
11	880.1	2103.3	2985.6
12	879.8	2103.5	2985.5
13	949.5	2044.8	3042.9
14	1026.3	1983.3	3101.7
15	1026.5	1984.7	3100.8
16	1026.5	1984.7	3100.8

本手法では、観測データを逐次取り込み、その観測データに対してローカルな繰り返しを行うことで含まれる情報を有効に抽出して、最適な状態ベクトルの推定を行っている。

また弾性係数の空間的なばらつき、試験誤差や観測データの誤差を考慮しているので、地盤の現状を表現していると言える。しかし、試験誤差や観測データの誤差を独立に考慮しているので状態ベクトルの推定値は必ずしも真値になるとは限らない。

6. 数値解析例（動的パラメータ同定）

地盤と構造物の動的なパラメータ同定を図-4に示す三層の地盤定数から成る不均質なモデルを仮定し、本手法の適用性の検討を行う。ここでは地盤の基盤面に地震荷重を作用させた場合において地表面（図中のNo.5）で得られる応答加速度波形を観測波形として、図-4に示す地盤の上部2層の動弾性係数 E_1 と E_2 の同定を行っている。なお、初期入力値の誤差共分散行列 $\mathbf{P}_0$ の対角項は、それぞれ $P=1.0 \times 10^2$ 、観測ノイズの分散は $R_{t,k}=1.0 \times 10^{-4}$ を用いている。また、観測波形はあらかじめ真の動弾性係数を与えて有限要素解析より求めた加速度波形に観測ノイズを加え、EK-WLI-FEM中のローカルな繰り返し回数は2回で同定を行っている。

観測加速度波形にノイズが5.3%含まれる場合の同定結果を図-5, 6に示す。図より状態ベクトルは約 3.0 secで収束している。

No.5 Observation point

E1=1000 tf/m ²	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
E2=5000 tf/m ²	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	37	38	39	40	41	42	43	44	45
8000 tf/m ²	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	55	56	57	58	59	60	61	62	63

図-4 地盤モデル (2)

7. 結 論

本手法は、拡張カルマンフィルタの逐次性を生かしたEK-WLI法のアルゴリズムと有限要素法を組み合わせたパラメータ同定手法である。そして、安定した最適状態ベクトルの推定結果が得られた。

また、拡張カルマンフィルタは、地盤定数の空間的な分布特性や不均質性を確率変数とし、土質調査などの試験誤差や観測データの誤差を状態方程式や観測方程式のノイズとして考慮することが可能である。

本研究は第二著者の指導により、第一著者が行ったものである。

<参考文献>

- 1). Jazwinski, A.H.: Stochastic processes and filtering theory, Academic press, 1970.
- 2). 片山 徹: 応用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1983.
- 3). 星谷 勝・斉藤悦郎: 拡張カルマンフィルタを用いた同定問題の各種振動系への応用, 土木学会論文集, No. 339, pp. 59-67, 1983
- 4). Hoshiya, M. and Saito, E.: Structural identification by Extended Kalman Filter, Jour. E. M. Div., ASCE, Vol. 110, No. 12, December, 1984
- 5). 星谷 勝・斉藤悦郎: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文集, No. 344, pp. 289-298, 1984
- 6). 村上 章・長谷川高士: Kalmanフィルタ有限要素法による逆解析と観

測点配置, 土木学会論文集, No. 388, pp. 227-235, 1987

- 7). 鈴木 誠・石井 清: 拡張カルマンフィルタによる土質定数の空間分布推定, 土木学会論文集, No. 406, pp. 71-78, 1989
- 8). 門田俊一・斉藤悦郎・和久昭正・後藤哲雄: 繰り返し拡張カルマンフィルタによる異方性岩盤物性の同定と地下空洞計測管理への適用, 土木学会論文集, No. 406, pp. 107-116, 1989
- 9). 須藤敦史・星谷 勝: 拡張カルマンフィルタの基本的考察とEK-WLI法の提案, 土木学会論文集, No. 437, pp. 203-211, 1991
- 10). 須藤敦史・星谷 勝: EK-WLI法と有限要素法を用いた逆解析, 土木学会論文集, No. 446, pp. 177-185, 1992
- 11). W.G.W. Yen, Review of Parameter Identification Procedures in Groundwater Hydrology: The Inverse Problem, Water Resources Research, 22(2) 1986

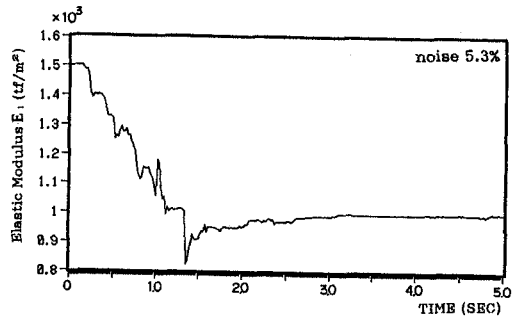


図-5 パラメータ同定結果 E₁

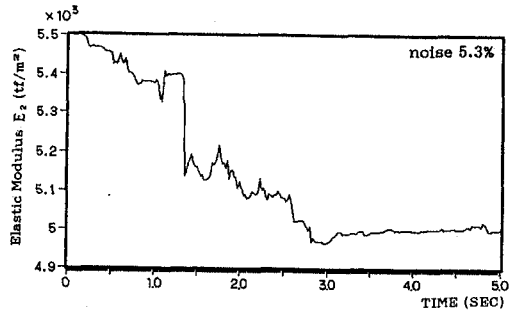


図-6 パラメータ同定結果 E₂