

I-53

連続桁の影響線を用いた固有周期の計算

北海道大学工学部 正員 林川 俊郎

北海道大学工学部 伊藤 照博

1. まえがき

連続桁は最も一般的な橋梁形式であり、人道橋あるいは道路橋に採用されている。都市内の人道橋や高架橋では、歩行者や走行車両による振動問題に対する検討が重要となることがある。例えば、人道橋に対しては振動使用性、連続鋼箱桁橋では耐風安定性について検討する必要がある。

これらの振動照査には、設計の初期の段階から歩道橋および桁橋の固有振動数を必要とする。今までに、3径間連続桁の基本鉛直たわみ振動数の簡易算定式が提示されている^{1), 2), 3)}。本報告では、すでに明らかになっている連続桁の影響線の縦距表および面積表⁴⁾を用いて、簡易的に連続桁の鉛直たわみ基本固有周期を算定する方法を提案する。

2. 固有周期および固有値の計算

2-1. Rayleigh法

ある一自由度の振動系が自由振動する際の運動エネルギーの最大値 K_{max} と、ひずみエネルギーの最大値 U_{max} が等しいことから、静的変位 $u_d(s)$ を用いて固有周期(T)を求める方法である。

系の自由振動： $u(s) = u_d(s) \sin(\omega_d t)$

運動エネルギーの最大値： $K_{max} = (1/2) \omega_d^2 \int_s M(s) u_d(s)^2 ds$

ひずみエネルギーの最大値： $U_{max} = (1/2) \int_s M(s) u_d(s) g ds$

ここで、 ω_d は振動モードの代わりに静的変位 $u_d(s)$ を用いた場合の固有円振動数、 g は重力加速度である。したがって、 $K_{max} = U_{max}$ より固有周期(T)は次のように求められる。

$$T = 2\pi / \omega_d = 2\pi \sqrt{\int_s M(s) u_d(s)^2 ds / \int_s M(s) u_d(s) g ds}$$

ここで、 $\delta = \int_s M(s) u_d(s)^2 ds / \int_s M(s) u_d(s) ds$ と定義すると

$$T = 2.01 \sqrt{\delta} \quad (1)$$

である。また、離散型の構造解析では、 W_i 、 U_i をそれぞれ位置 i における自重(tf)および静的たわみ(m)として次式を用いる。

$$\delta = \sum W_i U_i^2 / \sum W_i U_i \quad (2)$$

なお、変位 U_i を求める手法としてコンピューターを用いた骨組構造解析を行うのが一般的であるが、本研究では影響線を用いて U_i を計算し、式(1)と式(2)により固有周期を求める。

また、固有値 λ は次式により求められる。

$$\lambda = L \sqrt{W / \delta E I} \quad (3)$$

2-2. 影響線

桁上に単位荷重(unit load)が移動する場合、その単位荷重の位置によって変化する力および変位の大きさをその荷重の真下に縦距としてとり、その先端を結んで得た線を影響線(influence line)という。なお、本研究では、3径間連続桁として各径間比を $1:\alpha:1$ とすると $\alpha=1.0, 1.25, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ のときの8分割の影響線縦距表および影響線面積表を用いた⁴⁾。

2-3. 計算方法

影響線からたわみ値を求め、式(1)と式(2)を用いて固有周期(T)および式(3)を用いて固有値(λ)をそれぞれ求める。連続桁の影響線を用いたたわみ値は、荷重の載荷方法によって異なる。そこで、本研究では以下の3種類の載荷状態について検討し、固有周期および固有値を求める。

- (a) CASE 1: 影響線の面積表を用いて、全径間に自重がかかったときの3径間連続桁の支間中央点におけるたわみを求め、それと等しい値のたわみを生じさせる集中荷重P.を求める。そこで、図-1(a)のように、その換算集中荷重P.がかかったときのたわみ曲線を影響線縦距表を用いて求める。
- (b) CASE 2: まず、各径間にかかる自重を8等分し、7ヶの集中荷重に換算する。続いて図-1(b)のように第2径間の荷重は正の方向に、第1および第3径間の荷重は負の方向に載荷し各点におけるたわみ値を影響線の縦距表より計算する。
- (c) CASE 3: 各径間における荷重の載荷方法はCASE 2と同じであるが、各径間の自重による等分布荷重と影響線の面積表を用いて、各点のたわみ値を求める。

3. 数値計算結果

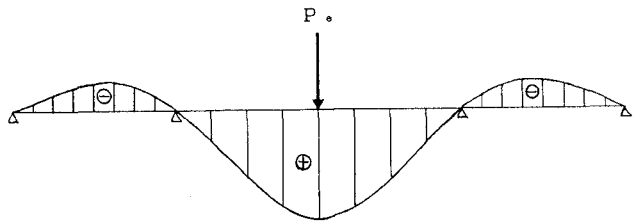
(a) CASE 1 (換算集中荷重)

3-1. 歩道橋(変断面)の固有周期

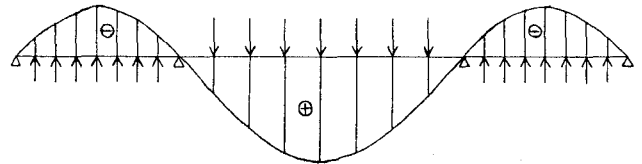
および固有値($\alpha=1.25$)

図-2のような断面諸元をもつ歩道橋をモデルに、Rayleigh法を用いて固有周期および固有値を求める。ここで、 $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$, $\bar{W}_3$ はそれぞれ、第1径間、第2径間、第3径間における等分布荷重、 W_{i1} , W_{i2} , W_{i3} は位置iにおける集中荷重、 I_1 , I_2 , I_3 は断面2次モーメントである。

図-3は整合質量法を用いた3次元固有振動解析による固有振動モードを表している。鉛直たわみ基本固有周期の値は $T_1=0.75253(\text{SEC})$ である。鉛直たわみ振動の第2次と第3次固有振動モードは、第3次と第4次モードに現れている。また、水平曲げ振動モードは第2次、5次、6次モードに現れていることがわかる。表-1には、前述の3通りの近似計算結果と整合質量法(便宜上、厳密解とよぶ)による結果の比較が示されている。この結果より、CASE 2とCASE 3は比較的良好な近似値を与えている。



(b) CASE 2 (影響線縦距)



(c) CASE 3 (影響線面積)

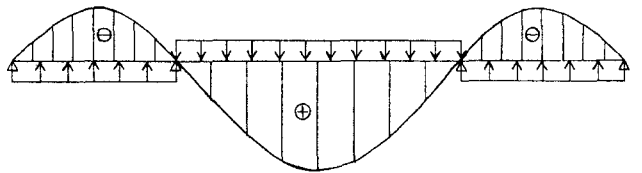


図-1 荷重の載荷方法

$$W_1 = 1.719 \text{ (t/m)}$$

$$W_2 = 1.754 \text{ (t/m)}$$

$$W_3 = 1.831 \text{ (t/m)}$$

$$W_{11} = W_1 * L_1 / 8 \\ = 12.74 \text{ (t)}$$

$$W_{12} = W_2 * L_2 / 8 \\ = 16.01 \text{ (t)}$$

$$W_{13} = W_3 * L_3 / 8 \\ = 13.57 \text{ (t)}$$

$$I_1 = 0.1064 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$I_2 = 0.1100 \text{ (m}^4\text{)}$$

$$I_3 = 0.1219 \text{ (m}^4\text{)}$$

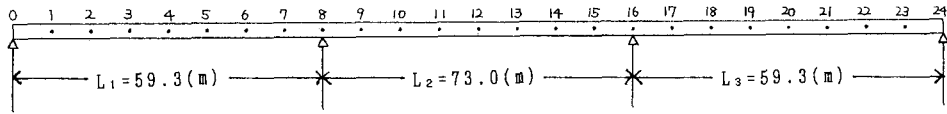


図 - 2 数値計算例

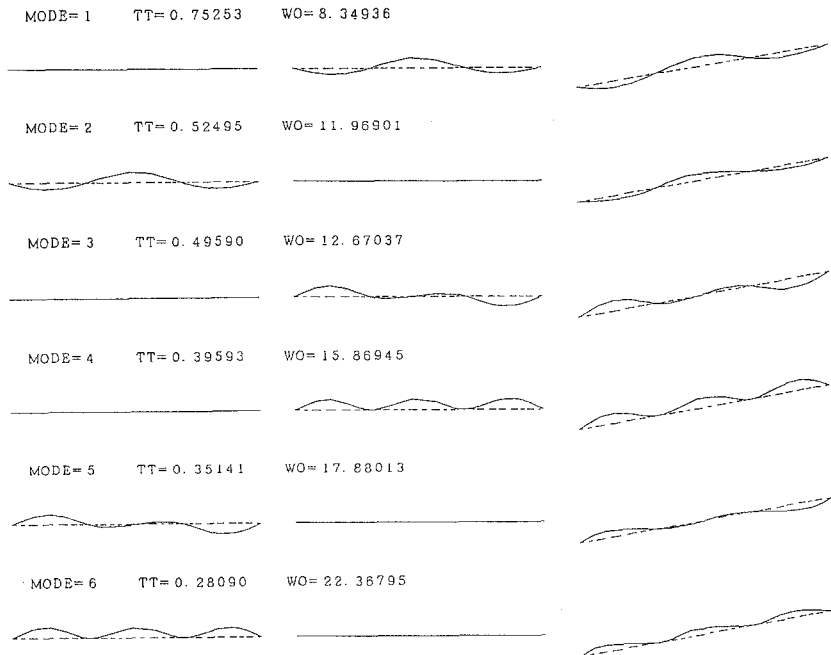


図 - 3 整合質量法による固有振動モード

表 - 1 固有周期 (T) と固有値 (λ) の比較 (α=1.25)

	近	似	解	厳密解
	CASE1	CASE2	CASE3	
T	0.715 (-5.05%)	0.752 (-0.13%)	0.760 (+0.93%)	0.753
λ	2.923 (+2.63%)	2.851 (+0.11%)	2.836 (-0.42%)	2.848

* 括弧内の数字は厳密解に対する誤差を表す

3-2. 3径間等断面連続桁 (α=1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0)

ここでは、一つの数値計算例として、 $\bar{W}=1.768 \text{ (t/m)}$, $L_1=L_3=59.3 \text{ (m)}$, $L_2=\alpha L_1$, $W_{11}=W_{13}=\bar{W} * L_1 / 8 = 13.11 \text{ (t)}$, $W_{12}=\bar{W} * L_2 / 8 = \bar{W} * \alpha L_1 / 8$, $I=0.1126 \text{ (m}^4\text{)}$ のような断面諸元をもつ3径間等断面連続桁について、径間比が1:α:1 (α=1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0) のそれぞれの場合の固有周期および固有値を求める。求められた固有周期および固有値の計算結果はそれぞれ表-2, 表-3に示す。なお、ここで示す厳密解は連続質量法による計算結果である⁵⁾。

表 - 2 固有周期 (T) の計算結果

支間比	近 似 解			厳密解
	CASE1	CASE2	CASE3	
$\alpha = 1.0$	0.523 (-15.4%)	0.619 (+0.16%)	0.623 (+0.81%)	0.618
$\alpha = 1.5$	0.960 (-2.54%)	0.965 (-2.03%)	0.970 (-1.52%)	0.985
$\alpha = 2.0$	1.565 (-1.14%)	1.552 (-1.96%)	1.559 (-1.52%)	1.583
$\alpha = 2.5$	2.321 (-0.98%)	2.314 (-1.28%)	2.323 (-0.90%)	2.344
$\alpha = 3.0$	3.221 (-0.95%)	3.226 (-0.80%)	3.238 (-0.43%)	3.252

* 括弧内の数字は厳密解に対する誤差を表す

表 - 3 固有値 (λ) の計算結果

支間比	近 似 解			厳密解
	CASE1	CASE2	CASE3	
$\alpha = 1.0$	3.418 (+8.78%)	3.142 (+0.00%)	3.132 (-0.32%)	3.142
$\alpha = 1.5$	2.523 (+1.37%)	2.517 (+1.12%)	2.510 (+0.84%)	2.489
$\alpha = 2.0$	1.976 (+0.66%)	1.985 (+1.12%)	1.980 (+0.87%)	1.963
$\alpha = 2.5$	1.622 (+0.50%)	1.625 (+0.68%)	1.622 (+0.50%)	1.614
$\alpha = 3.0$	1.378 (+0.58%)	1.376 (+0.44%)	1.374 (+0.29%)	1.370

* 括弧内の数字は厳密解に対する誤差を表す

支間比を表すパラメータ α が増加すると、いずれの近似計算法も精度が良くなる傾向にある。特に、CASE 2 と CASE 3 による固有周期 (T) および固有値 (λ) の計算値は厳密解をよく近似している。影響線の面積表を用いた CASE 3 の方法は、CASE 2 に比較して簡潔であり、簡単な手計算により求めることができる。したがって、今後、連続桁の近似的な固有周期および固有値の計算には CASE 3 の方法が役立つものと考えられる。

4. あとがき

本研究では、連続桁の影響線を用いて固有周期および固有値を、近似的に求める方法について検討した。得られた結果および今後の課題についてまとめると次のようになる。

- 1) 3 径間連続桁の中央支間長が長くなるにつれて、良い近似解が得られる。
- 2) CASE 1, 2, 3 の近似計算法の中で、CASE 2 と CASE 3 により求められた固有周期および固有値は比較的良好な精度で近似解を求めることができる。
- 3) 特に、影響線の面積表を用いた CASE 3 の近似計算は、簡単な手計算により求めることができ、歩道橋の振動使用性や耐風設計の予備計算に役立つものと考えられる。
- 4) 今後の研究課題として、3 径間連続桁にとどまらず、他の径間割や変断面桁についても検討して行く必要がある。

最後に、本研究に関して多くの助言を賜った北海道大学名誉教授渡辺昇氏に謝意を表します。さらに、数値計算および電算プログラムの作成に多大な御協力をいただいた北海道大学小幡卓司助手に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 加藤雅史・島田静雄：橋梁実測振動特性の統計解析，土木学会論文報告集，pp.49～58, 1981, 7.
- 2) 川谷充郎・嶋田玲志：桁橋の構造諸元実態調査と走行荷重による不規則振動，構造工学論文集，Vol.34A，pp.721～730, 1988, 3.
- 3) 米田昌弘・宮地真一：桁橋の鉛直たわみ基本固有振動数を推定するための実用算定式について，構造工学論文集，Vol.38A，pp.765～772, 1992, 3.
- 4) 渡辺 昇：連続げた影響線の縦距表と面積表，1968, 11.
- 5) Toshiro Hayashikawa: Dynamic Response Analysis of Multispan Bridge Structures by Means of Continuous Mass Method (学位論文)，pp.25～29, 1983.