

I-44

波浪下における緊張係留された水中トンネルの動揺特性

北海道大学工学部 正 員 三上 隆 北海道大学工学部 学生員 田尻 太郎
 北海道大学工学部 学生員 島田 智浩 北海道大学工学部 正 員 佐伯 昇
 北海道大学工学部 正 員 芳村 仁

1. はじめに

水中トンネルは、水没したトンネルが浮力と係留索の張力によって支持される構造で、橋梁や海底トンネルに比べて工費が安く、また沈埋トンネルに比べて大水深に対応できる等の利点がある。しかし従来、同じ構造形式としてはTLP等を除いて水中トンネルが実用化された例はなく、特に波浪作用によって係留索にスラック（弛み）が発生した場合、スナップ荷重等の有害な影響が現れる。そこで本研究は、スラックの発生しない条件を、パラメータスタディーによって調べた。

2. 水中トンネルの運動方程式

水中トンネルの運動方程式は、次式となる。

$$(M + q C_M) \ddot{X} + C \dot{X} + K X = f(t) \quad (1)$$

ここで行列 M 、 C_M 、 C 、ベクトル X は、

$$X = (x, y, \theta)^T$$

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad C_M = \begin{bmatrix} c_m - 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_m - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

m : トンネル質量, I : トンネル慣性モーメント, $c_m = 2$: 付加質量係数

$q = \pi a^2 \rho$: 排水質量, a : トンネル半径, ρ : 流体密度

$$C = \begin{bmatrix} 2 h w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 h w_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (M + q C_M), \quad \begin{aligned} h &= 0.06: \text{レイリー減衰の係数} \\ w_1 &: x \text{ 方向固有角速度} \\ w_2 &: y \text{ 方向固有角速度} \end{aligned}$$

次に剛性マトリックス K は、緊張ケーブル1～4の剛性マトリックス K_i を加えれば得られる。各ケーブルの剛性 K_i は、ケーブルの軸方向とそれに直交する方向に軸を持つ局所座標系における剛性 K_{oo} を全体座標系、 $x-y-\theta$ に射影すればよい。ただしトンネル断面は円形で係留形状は左右対称、水平・鉛直面方向の波力に抵抗するために、図-1の係留方式を考え、微小変位と線形バネを仮定する。

$K = \sum_{i=1}^4 K_i$, $K_i = S_i^T K_{oo} S_i$, $i = 1 \sim 4$: ケーブル番号, k : ケーブルのバネ定数

$s = P/L$: 幾何剛性, P : 浮力と自重によって定まる初期張力, L : ケーブル長

$$S_i = \begin{bmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \sin \alpha_i \\ 0 & 1 & a \cos \alpha_i \end{bmatrix}, \quad K_{oo} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$f(t)$: 修正モリソン式より定まる波力。Uを流体速度とすれば、

$$f(t) = \rho (a C_D |U| U + \pi a^2 C_m \frac{\partial U}{\partial t}) \quad , \quad C_D = 1, \quad C_m = 2$$

流速ベクトルUは、トンネル中心における流速を用い、

二次元ポテンシャル理論により計算する。入射波として調和振動の進行波を用いる。以上の定式においては全体座標系の原点は、自重と張力が浮力と釣り合う静的平衡位置をとり、トンネルは剛体と仮定している。

Dynamic response of submerged Tunnel with Tension Legs under Wave Force
 by Takashi Mikami, Taro Tajiri, Tomohiro Shimada, Noboru Saeki, Jin Yoshimura

3. ケーブル張力とスラック

各ケーブルの軸方向歪み ε_i は、 S_i より次式で表される。

$$\varepsilon_i = (x \cos \beta_i + y \sin \beta_i - a \theta \sin(\beta_i - \alpha_i)) / L + \varepsilon_{0i} \quad \text{————— (2)}$$

ただし ε_{0i} は、初期張力による初期歪み。式(2)が負となった時、ケーブル i にスラックが発生したと考える。この時 $K_i = 0$ とおき、 K に対する寄与を除く。ケーブル i の張力は0である。

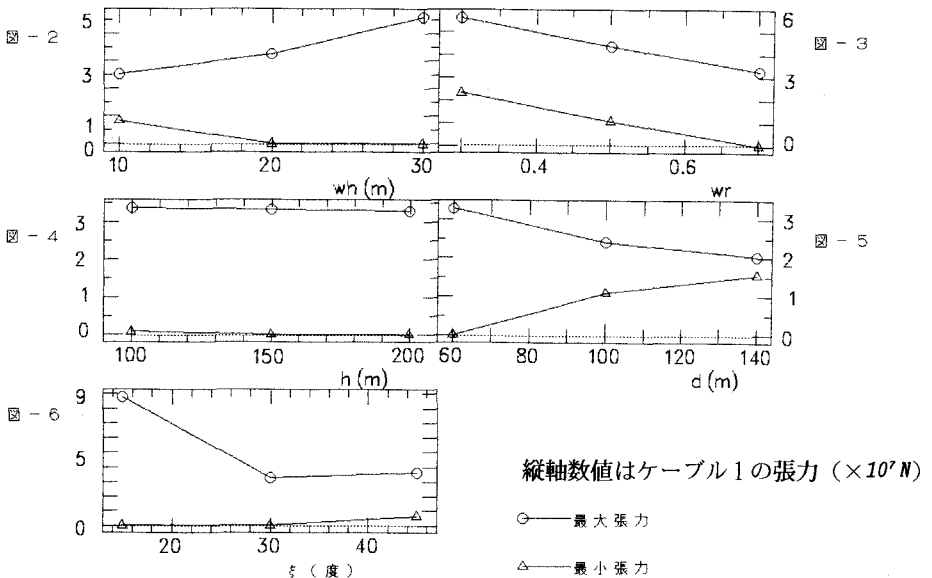
4. パラメータ・スタディー

以下の諸元に対して運動方程式(1)を *Newmark* — β 法により解いた。図中の張力は、後述するスラック判定法により、スラックに対して最も危険側にあると判断されたケーブル1についてのものである。

表一 検討ケース

パラメーター	波高 wh (m)	比重 wr	海底面位置 h (m)	設置水深 d (m)	斜レグ角度 ξ (度)
波高	10.0, 20.0, 30.0	0.7	200.0	60.0	30
比重	20.0	0.3, 0.5, 0.7	200.0	60.0	30
海底面位置	20.0	0.7	100.0, 150.0, 200.0	60.0	30
設置水深	20.0	0.7	200.0	60.0, 100.0, 140.0	30
斜レグ角度	20.0	0.7	200.0	60.0	15, 30, 45

$\alpha_i = -30$ 度, $\rho = 1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $k = EA g/L$, $E = 2.01 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$: ヤング率, $A = 0.09 \text{ m}^2$: ケーブル断面積, $g = 9.8 \text{ m/s}$, $a = 11.5 \text{ m}$, 設置水深 d : 水面からトンネル天端までの距離, 入射波の周期は13秒。



○図-3より、比重の増加は最大・最小張力を減らす。自重に対して浮力が相対的に減少するのが原因である。最小張力の減少は、スラックに対して不利である。

○図-4で、水深の変化に対して最大張力が変わらないことから、100m以上の水深については海底位置の変化は、さほど影響しない。

○図-5より、設置水深の増大は、最大張力を減らし最小張力を増加させ、初期張力へ近づく。これは波力

の減少を意味する。またケーブル長の減少から剛性の増大をもたらすから、スラックに対して、非常に有利である。

○図-6において波力は一定である。にも関わらず最大張力が設置角の増大と共に減少するのはスラックが止まったからであり、最大張力がほぼ一定化すると同時に最小張力が0から増加する。

5. スラックにおける張力状態

図-7は、他のパラメータを不変にして波高を増加させた時の最大張力の変化である。図はおよそ、三つの領域A, B, Cに分かれ、それぞれの中ではほぼ線形に変化する。A, B, Cにおける代表的な張力・変位の時刻履歴波形を図-8～10に示す。

領域Aは非スラック状態で、波形は初期状態の影響が減衰して強制振動解だけになる調和振動。

Bは振幅が増大しないという意味では安定で準周期的だが、スラックは明瞭に現れ、鋭く動揺する。

一種の遷移状態と考えられる。

Cは、振幅が時間と共に増大する不安定領域。張力は衝撃的にかかり、スナップ荷重となっている。図-7よりその大きさは、非スラック状態の6倍～7倍となる。

6. 構造パラメータによるスラック判定法

ここでは、構造の固有値・固有ベクトル・形状パラメータによって、スラックを比較的簡単に判定できることを示す。以下簡単のため、トンネルの変位は、x, y方向の二自由度、ケーブルは二本とする。

まず非減衰の場合を考える。

モリソン式より波力は次式となる。

$$f(t) = (A_1 \sin \omega t, A_2 \cos \omega t)$$

A_1, A_2 はPotential 理論とモリソン式より定まる定係数。モリソン式の二次の項 ($\rho a C_D |U| U$) は小さいので無視する。

運動方程式 (1) で $C = 0$ とおけば、

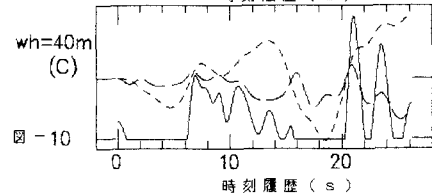
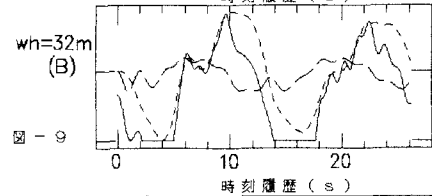
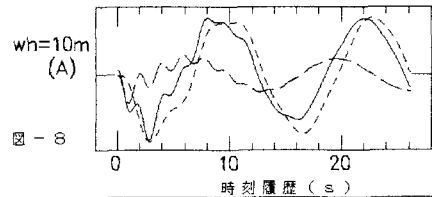
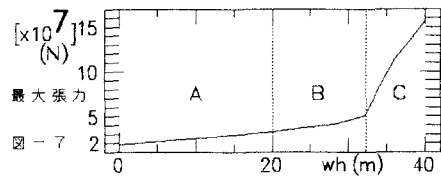
$$M \ddot{X} + K X = f(t) \quad (3)$$

ただし、 M の中には付加質量も含めて考える。

式 (3) を $M^{-1}K$ の固有ベクトルで変換すれば、

$$E \ddot{Y} + \text{diag}(k_1, k_2) Y = B^{-1} M^{-1} f(t) \quad (4)$$

が得られる。 E は単位行列、 diag は対角行列を表し、 (k_1, k_2) は $M^{-1}K$ の固有値。 Y は固有ベクトルによる基底変換行列を B として $X = B Y$ である。式 (4) の強制振動解 Y_1 は明らかに



..... x 方向変位 ——— 張力
 y 方向変位

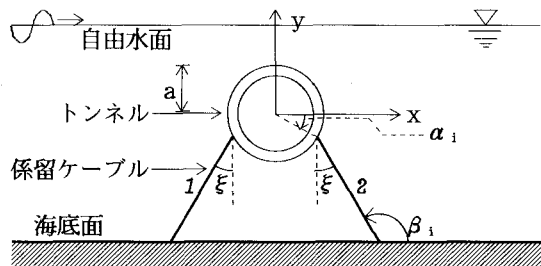


図-11

$$Y_1 = \text{diag} \left[\frac{1}{k_1 - \omega^2}, \frac{1}{k_2 - \omega^2} \right] B^{-1} M^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \sin \omega t \\ A_2 \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)の固有振動 Y_0 は、

$$Y_0 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{k_1} t & \sin \sqrt{k_1} t & \cos \sqrt{k_2} t & \sin \sqrt{k_2} t \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

$C_{11} \sim C_{22}$ は初期条件で決まる

式(4)の一般解は、 $Y = Y_0 + Y_1$ である。 X に対するスラック判定条件は式(2)より、

$$\varepsilon_i = (x \cos \beta_i + y \sin \beta_i) / L + \varepsilon_{0i}, \quad \varepsilon_i \geq 0 \text{ がスラックの発生しない条件.} \quad (7)$$

Y に対する判定条件は、式(7)を B で変換すればえられる。 $\beta_i = \mp \pi/2 \pm \xi$ である。

$$L \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \xi & \cos \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} B^{-1} Y + L \begin{bmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} -\sin \xi & \cos \xi \\ \sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} B^{-1} = T \text{ とする。} T = (T_{ij})$$

式(8)に式(5)、式(6)を代入すれば、

$$T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{k_1} t & \sin \sqrt{k_1} t & \cos \sqrt{k_2} t & \sin \sqrt{k_2} t \end{bmatrix}^T \\ + T \text{diag} \left[\frac{1}{k_1 - \omega^2}, \frac{1}{k_2 - \omega^2} \right] B^{-1} M^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \sin \omega t \\ A_2 \cos \omega t \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (9)$$

式(9)よりスラック判定には、周期の違う三つの振動を合成し、その負の最大振幅を求める必要がある。そこで次のように仮定する。入射波の周期はトンネルの固有周期より十分長いとする。すると強制振動の最大振幅時 t_0 のまわりで、固有振動は十分速く正負の最大振幅をとる事になるから、強制振動の負最大振幅に固有振動の負最大振幅を加えたものを、全体の負最大振幅とみなす事ができる。時刻 t_0 は、強制振動が単周期の波なので解析的な形式解は、容易に求まる。

$$T \text{diag} \left[\frac{1}{k_1 - \omega^2}, \frac{1}{k_2 - \omega^2} \right] B^{-1} M^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \sin \omega t_0 \\ A_2 \cos \omega t_0 \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \varepsilon_{01} \\ \varepsilon_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

とすれば、

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \geq 0 \quad (10)$$

$$\text{かつ} \\ T \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{k_1} t & \sin \sqrt{k_1} t & \cos \sqrt{k_2} t & \sin \sqrt{k_2} t \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T \geq 0 \quad (11)$$

式(10)についての計算は明らか。式(11)は周期の違う二つの振動の合成となるが、次のようにすれば負最大振幅は容易に計算できる。式(4)より $Y_0 = (y_1, y_2)^T$ は独立なエネルギー保存則を満たす。

$$\frac{1}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} k_1 y_1^2 = E_1, \quad \frac{1}{2} \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 = E_2$$

E_1, E_2 は初期条件より定まるエネルギーである。よって独立な振動の振幅は、次式を満たす。

$$y_1^2 \leq 2 E_1 / k_1, \quad y_2^2 \leq 2 E_2 / k_2 \quad (12)$$

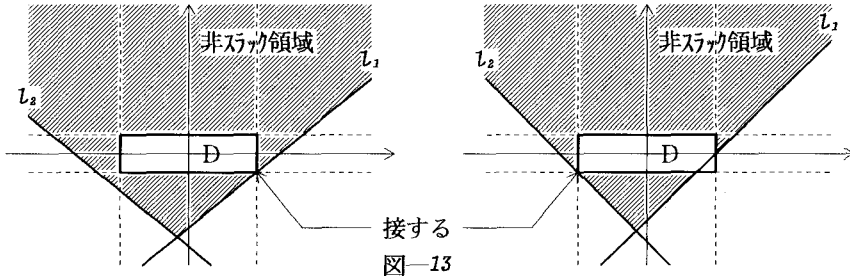
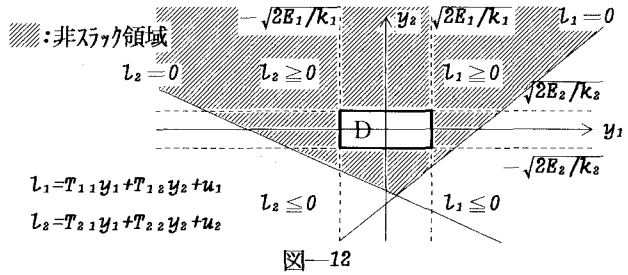
式(12)を満たす任意の $(y_1, y_2)^T$ が式(11)を満たせば、スラックは起こらない。

この関係を図示すれば図-12となる。図-12の矩形領域 D の中に、固有振動の解曲線 $(y_1(t), y_2(t))$ は存在するが、解曲線の点は、 D の全ての点を通るわけではない。

しかし文献〔2〕によれば、十分長時間の後には、解曲線は D を稠密に埋める事が知られている。よって実質的に、解が通過する点全体を D とみなしてよい。従って、スラックが起きない限界の状態は、図-13の

どちらかである。

条件としては、厳しいほうをとる。図—13より明らかに、 l_1 に対する条件のほうが厳しく、スラック判定はケーブル1について行い、ケーブル1が危険ケーブルとなる。



次に減衰がある場合、運動方程式 (1) の強制振動解は、

$X_1 = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t$ と書ける。ただし、 b_1 、 b_2 は、

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M + K & \omega C \\ -\omega C & -\omega^2 M + K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

を満たすベクトル。式 (1) の固有振動は、

$$\begin{aligned} X_0 = & c_1 (a_{11} e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + a_{12} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t) \\ & + c_2 (a_{21} e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + a_{22} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t) \\ & + c_3 (a_{31} e^{-\alpha_2 t} \cos \beta_2 t + a_{32} e^{-\alpha_2 t} \sin \beta_2 t) \\ & + c_4 (a_{41} e^{-\alpha_2 t} \cos \beta_2 t + a_{42} e^{-\alpha_2 t} \sin \beta_2 t) \end{aligned}$$

と書ける。ただし α_i 、 β_i は、 $\det(\gamma^2 M + \gamma C + K) = 0$ の複素解 γ の実部及び虚部の絶対値。

ベクトル $a_{11} \sim a_{42}$ は、

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{(a_1^2 - \beta_1^2) M - a_1 C + K}{\mp \beta_1 (-a_1 M + C)} & \frac{\pm \beta_1 (-a_1 M + C)}{(a_1^2 - \beta_1^2) M - a_1 C + K} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = 0$$

を満たす固有ベクトル。 $c_1 \sim c_4$ は初期条件で定まる係数である。

減衰がある場合、時間と共に固有振動は 0 となり、長時間後に対しては強制振動の振幅だけで、スラック条件が定まるが、この条件は時間の初期に対して、明らかに危険側の評価になる。そこでスラック判定の対象として、強制振動の最初の一周期の負最大振幅時 t_0 を選ぶ。

前と同様に、強制振動は単周期の波なので、 t_0 は解析的に書ける。時刻 t_0 に固有振動が 0 又は 0 に近く、時刻 t_0 での固有振動の振幅を、強制振動の振幅に加えただけでは、 t_0 付近での固有振動の寄与を十分に評価しきれないという事態もあり得るので、次のようにする。減衰と強制振動が、固有振動に対して十分遅いと仮定すれば、強制振動の負最大振幅時 t_0 のまわりで固有振動は、減衰を伴わずに十分速く正負の最大振幅をとるとみなせるから、 t_0 まわりでの固有振動の振幅を評価するために、非減衰の場合の判定方法を用いる。

この時、初期条件によって定まるエネルギー E_1 、 E_2 には、 t_0 における減衰固有振動 X_0 の変位と速度、 $X_0(t_0)$ 、 $dX_0(t_0)/dt$ を用いて、 E_1 、 E_2 を定める。その後の手順は、非減衰の場合と同様である。

以上の手順に基づき、三自由度・図-1の係留方式の水中トンネルにおいて、

$$f(t) = (A_1 \sin \omega t, A_2 \cos \omega t, 0)$$

の形の波力に対し、スラックのおきない限界波高を求めた。次に、その波高を用いて運動方程式(1)をNewmark- β 法で積分した結果を図-14に示す。

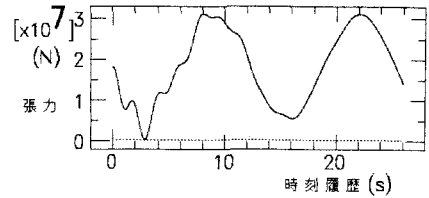


図-14

最大張力 $3.116180 \times 10^7 \text{ N}$ に対し、最小張力 $3.537490 \times 10^5 \text{ N}$ 。最小張力は最大張力の1.14%の安全側の評価を与えている。なおNewmark- β 法には、スラック判定で無視したモリソン式の二次項を加えてある。

図-13の状態を式で陽に書き表せば、符号も考慮した最大振幅のたんなる和が、負最大振幅になることがわかる。

$$\sum_{i=1}^3 \left[\pm \sqrt{\frac{2E_i}{k_i}} \right] T_{ij} + u_i \geq 0 \quad \text{--- (13)}$$

$i = 1 \sim 4$ (ケーブルの本数)

$j = 1 \sim 3$ (自由度の数)

(13) 式がスラックの発生しない条件であり、 E_i , k_i , T_{ij} には構造パラメータが全て含まれる。

(13) 式は、外力による強制最大振幅 u_i さえわかれば、容易に数値計算が行える。外力が調和振動ではない場合でも、それが単周期の波であれば、強制振動解は一般に周期関数である。強制振動の負最大振幅を決めるには、振動の一周期だけを数値的に調べればよい。また多重周期の外力に対しては、全周期の近似的な最小公倍数までを調べればよいと考えられる。

7. 結論

(1) 比重が軽く大水深に設置され、斜レグ角度が大きい構造が、スラックに対して有利である。この時、海底面位置(水深)は余り影響しない。特に大水深に設置する事は、波力の減少からスラックについて非常に有利なので、できるだけ深く設置した、斜レグ角度の大きい構造が望ましい。

(2) スラック判定条件を、構造の固有値・固有ベクトル・形状パラメータの関数として陽に与えた。外力による強制最大振幅さえわかれば、スラック判定は容易に行える。かつ、この評価は安全側の評価である。

参考文献

- [1] 緊張繫留されたフラットフォームのシフト荷重/吉田宏一郎, 米家卓也/日本造船学会論文集, 第146号(1979)
- [2] 古典力学の数学的方法/アーノルド/第3章, § 16, pp63~68