

I-19

構造最適設計における感度解析に関する基礎的研究

室蘭工業大学 学生員 越谷学、正員 杉本博之

1. まえがき

構造最適設計における感度解析とは、目的関数および変位や応力などの制約条件を設計変数に関して微分し、その一次の微係数を求めることである。この感度解析の計算は、解析的に行われる場合と差分で行われる場合があり、後者は解析的な微分が困難な場合に用いられるが、実際の構造最適設計においてはその実用性から差分法を利用するケースが多い。そのため、構造最適設計の過程における感度解析には、数十回から数百回の構造解析を行うことが必要となり、これらに多大な計算時間を要することが、構造最適設計を実務に応用する上で大きな障害の一つとなっている。

そこで本研究においては、トラス構造物を例に挙げ、最適化手法として逐次線形計画法 (SLP) および逐次二次計画法 (SQP) の2手法^{1) 2) 3)}を用いて、最適化過程における感度解析を、従来のように各繰り返し計算毎に毎回行うのではなく、1回の繰り返し計算で求めた微係数の値をそれ以降数回の繰り返し計算過程においてそのまま使用するという感度解析の省略⁴⁾を行い、この解析における多大な計算時間の短縮化を試み、その時々での最適解の比較を行って、その有効性についての若干の考察を加えたので発表するものである。

2. 最適設計問題の定義

一般に、制約条件のある最適化問題は次のように定義される。これを原問題とする。

$$\text{目的関数} : F(\mathbf{X}) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \quad (2)$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \quad (i=1 \sim n) \quad (3)$$

$$\text{設計変数} : \mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (4)$$

ここで、 F は目的関数、 g_j は制約条件、 $\mathbf{X}$ は設計変数、 m は制約条件の数、 n は設計変数の数、 x_i^L 、 x_i^U は、それぞれ設計変数 x_i の上下限值である。

3. 最適化計算法

本研究で使用した最適化計算法である逐次線形計画法についての説明を行う。

この手法は、原問題の目的関数および制約条件を線形近似し副問題を作成する方法であり、この副問題を線形計画法等で解き、その手続きを繰り返すことにより最適解が得られるが、その副問題は、一般に次のように定義される。

$$\text{目的関数} : F(\mathbf{X}) \approx F(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}^{(k)}) + \nabla^T F(\mathbf{X}^{(k)}) \delta \mathbf{X} \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\text{制約条件} : g_j(\mathbf{X}) \approx g_j(\mathbf{X}) = g_j(\mathbf{X}^{(k)}) + \nabla^T g_j(\mathbf{X}^{(k)}) \delta \mathbf{X} \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \quad (6)$$

$$x_i^L - x_i^{(k)} \leq \delta x_i \leq x_i^U - x_i^{(k)} \quad (i=1 \sim n) \quad (7)$$

$$-\xi |x_i^{(k)}| \leq \delta x_i \leq \xi |x_i^{(k)}| \quad (i=1 \sim n) \quad (8)$$

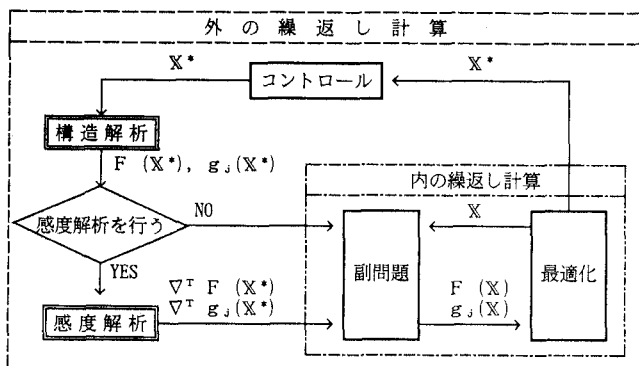
$$\text{設計変数} : \delta x_i = x_i - x_i^{(k)} \quad (i=1 \sim n) \quad (9)$$

ここで、式(7)は設計変数の上下限值、式(8)の制約条件式は、ムーブリミットを表し、これは1回の繰り返し計算における設計変数の大きな変化を防ぐための条件である。これはこの線形近似が現在の設計 $\mathbf{X}^{(k)}$ の近傍のみで有効と考えられるため、収束の安定性を保証するために設定されている。また本研究においてスケールリングは、SLPによる最適化では行わず、SQPによる最適化では行っている。

4. 感度解析の省略について

本研究における最適化の流れを図-1に示す。

ここで、 $F(X^*)$ 、 $G_j(X^*)$ は、それぞれ目的関数、制約条件であり、 $\nabla^T F(X^*)$ 、 $\nabla^T g_j(X^*)$ は、それらの微係数を表している。最適化の構成は、最適設計コントロール部において設計変数の解析変数への置き換えが行われ、構造解析および感度解析が実行される。そして次に内の繰り返し計算部において、ユーザーが使用する最適化手法における副



図一 最適化部分のフローチャート

問題の作成および最適化が実行され、これにより得られた解が最適設計コントロール部へと運ばれ、この繰り返しにより最適解が得られる仕組みになっている。

本研究においては、この最適化の流れの中の感度解析の部分を各繰り返し計算毎に毎回実行する場合と数回おきに実行する場合とで比較を行い、この感度解析の省略が最適解にどのような影響を及ぼすかについて検討する。ここで感度解析の部分については、必ず繰り返し計算1回目においては実行され、それ以降の繰り返し計算過程においては、感度解析が実行されるならば1回目同様に解析は行われ、省略される場合においては前回の感度解析によって求めた微係数がそのまま内の繰り返し計算部へと運ばれ副問題の作成および最適化が行われるようになっている。

5. 数值計算例

ここでは実際に39部材トラス(図-2)および79部材トラス(図-5)の数値計算例より、感度解析の省略が最適解にどのような影響を及ぼすかについて検討を行う。ここで感度解析の省略については、パラメータNにより1~10まで1刻みに設定した。これは、例えばN=1であれば各繰り返し計算において毎回感度解析を行うことを意味しており、N=3であれば繰り返し計算1回目、4回目、7回目・・・において感度解析が行われ、繰り返し計算2回目、3回目については繰り返し計算1回目に計算された微係数がそのまま使用されることを意味している。本研究のトラスの最適設計問題において、目的関数は全容積(m^3)、制約条件は各部材断面における応力⁵⁾のみとし、設計変数は各部材断面積(cm^2)としている。

また、39部材トラス、および79部材トラスにおける設計変数と各部材のリンクの関係をそれぞれ表-1、2に、また、初期値の条件を表-3に示した。

(1) 39部材トラスによる検討

本研究に使用した39部材トラスの構造およびその荷重条件を図-2に示す。

i) 設計条件 A の場合

この場合の計算結果における感度解析の省略回数と目的関数の関係を表したのが図-3. a、図-3. bである。

ここで N は感度解析の省略回数、 V (m^3) は目的関数である。これを見ると、図一3. aから、SLPによる最適化においては初期値 c の $N=8$ 以上の場合を

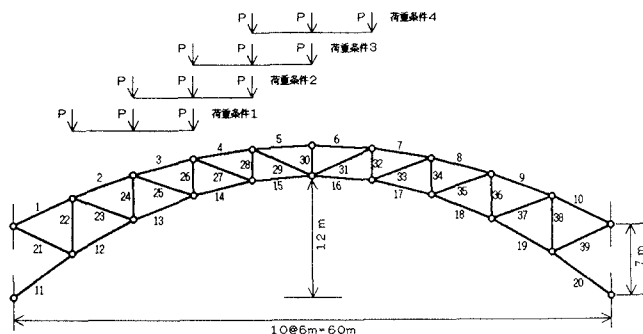


図-2 39部材トラス

表一 39部材トラスの各設計条件とそのリンクの関係

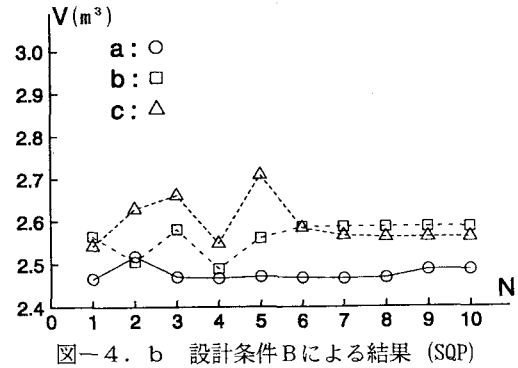
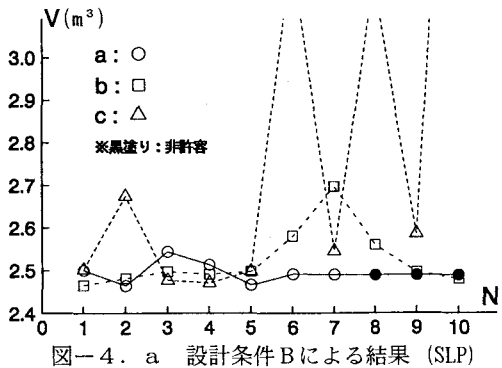
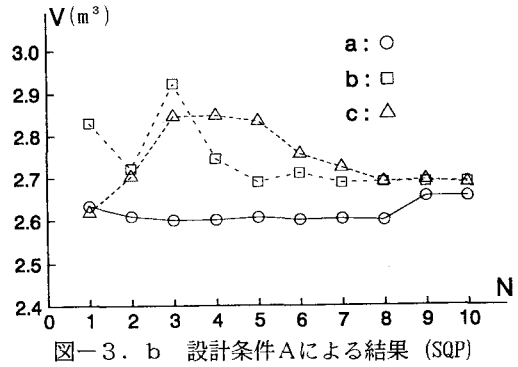
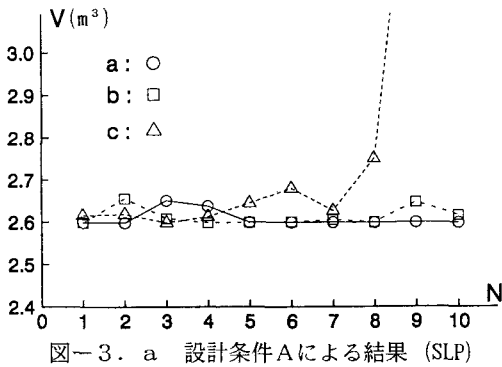
設計条件	設計変数の数	設計変数											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	8	部材番号	1	3	5	11	13	15	22	21			
			2	4	6	12	14	16	38	39			
			10	7	8	19	17	18					
B	12	部材番号	1	2	3	4	5	11	12	13	14	15	22
			10	9	8	7	6	20	19	18	17	16	38
													39

表三 各初期条件における部材断面積 (cm²)

初期値条件	a	b	c
39部材トラス	100	200	300
79部材トラス	300	400	500

表二 79部材トラスの各設計条件とそのリンクの関係

設計 条件	設計 変数の 数	設計変数																																					
		1～20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40																	
A	22	部材番号 上下弦各部材の対称リンク	41 79	42 78																																			
B	30		41 43 77 79	45 47 73 75	49 51 69 71	53 55 65 67	57 59 61 63	42 44 76 78	46 48 72 74	50 52 70	54 56 64 66	58 60 62																											
C	40		41 79	42 78	43 77	44 76	45 75	46 74	47 73	48 72	49 71	50 70	51 69	52 68	53 67	54 66	55 65	56 64	57 63	58 62	59 61	60																	



除くと、感度解析を省略しない場合（ $N = 1$ ）に比べて 表－4 39部材トラス：設計条件A－(a) の結果

て感度解析の省略による最適解への影響は最大で約2 %程度であった。次に、この最適化における初期値aの $N = 1 \sim 5$ における目的関数、各感度解析の省略回数における繰り返し計算回数、各計算において実際に

N	1	2	3	4	5
目的関数V (m^3)	2.60	2.60	2.65	2.64	2.60
繰返し計算回数	11	16	8	11	11
感度解析回数	11	8	3	3	3
構造解析回数	101	82	34	37	37

行われた感度解析回数およびこの最適化における構造解析回数を表－4に示した。これより、例えば $N = 1, 2, 3$ の場合を比較すると、目的関数の値は $N = 1$ の場合に対して $N = 2$ では等しく、 $N = 3$ の場合でも1.5 %程度の変化に止まっているが、構造解析回数はそれぞれ約20 %、65 %程度減少している。

また、図－3. bにおけるSQPによる最適化では、初期値aを除くとSLPの場合に比べ得られる目的関数にばらつきが見られたが、初期値bでは、 $N = 3$ の場合以外はすべて目的関数は逆に良性化している。また初期値cにおいては、 $N = 3, 4$ において目的関数は約9 %程度変化しているが、これ以上の影響を受けることはなかった。

ii) 設計条件Bの場合

この場合の数値計算における感度解析の省略回数 N と目的関数V (m^3)の関係を、図－4. a、図－4. bに示す。

まず図－4. aにおけるSLPによる最適化では、初期値aでは、 $N = 8 \sim 10$ では非許容解となっているが、それ以外においては $N = 1$ の場合と比較すると最大で $N = 2$ での約2 %程度、また初期値bにおいては最大 $N = 7$ での約9 %程度の変化であるが、初期値cにおいては、 N の値によって目的関数の値は大きく変化している。特に $N = 6, 8$ で $N = 1$ の場合と比較すると約30 %、 $N = 10$ では約60 %と大きく目的関数の値は変化しているが、これは $N = 6, 8, 10$ の場合において感度解析を省略することにより最適化において線形近似による誤差が大きくなってしまったためと考えられる。次に図－4. bにおけるSQPによる最適化の結果では、初期値aおよびbでは、 $N = 1$ の場合に比較して目的関数はそれぞれ最大で約2 %、1 %程度の変化であり、初期値cにおける $N = 5$ での約7 %程度の変化を除くと、他はすべて比較的感度解析の省略による影響を受けていない。

以上のようなことから、設計条件A、B共に初期値cの中にいくつか感度解析を省略した場合の目的関数の値に他の初期値条件に比べて大きく変化しているものが見られたが、これはこの初期値の設定に問題があったためと考えられる。すなわちこれらは初期設計点が真の最適解から離れていたために感度解析の省略により線形近似による誤差が大きくなってしまったものと考えられる。また他の初期値a、bにおいては、 $N = 1$ の場合に比べ目的関数の値には大きな変化は見られず、感度解析を省略することによる目的関数への影響はほとんどなかった。

(2) 79部材トラスによる検討

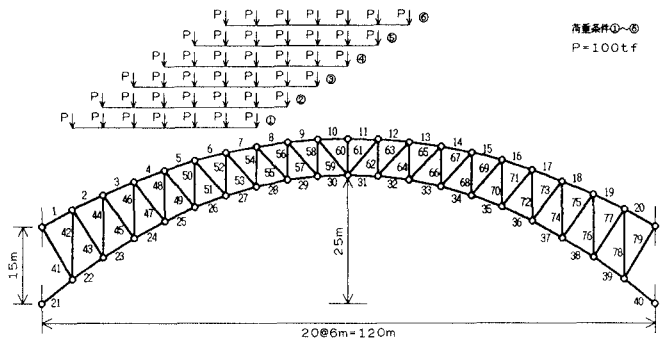
ここでは、構造設計規模の拡大に伴う設計変数および制約条件の増加における感度解析の省略による目的関数への影響を検討するために、79部材トラスを使用し数値計算を行った。

本研究の79部材トラスの構造およびその荷重条件を図－5に示す。

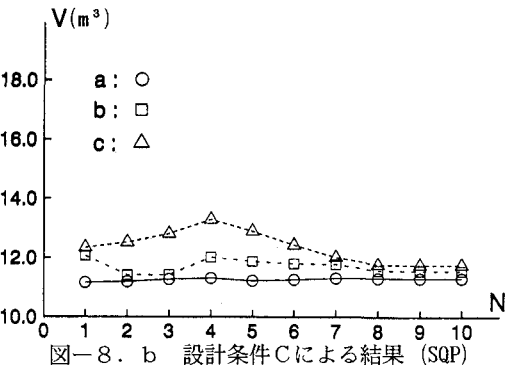
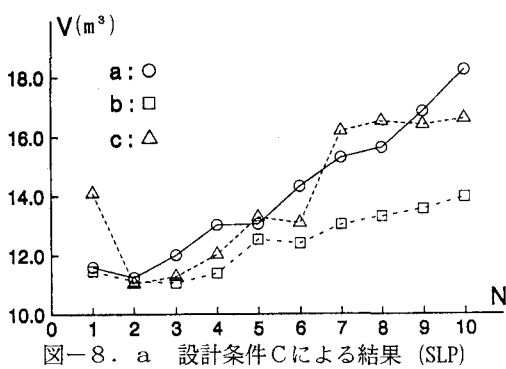
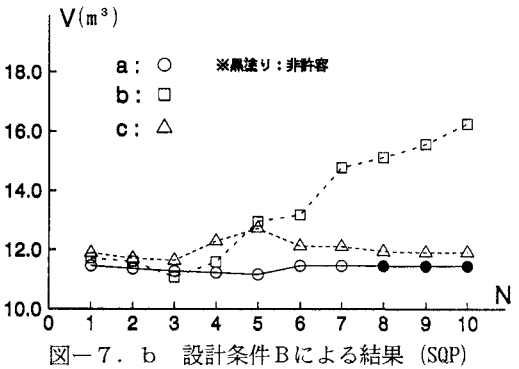
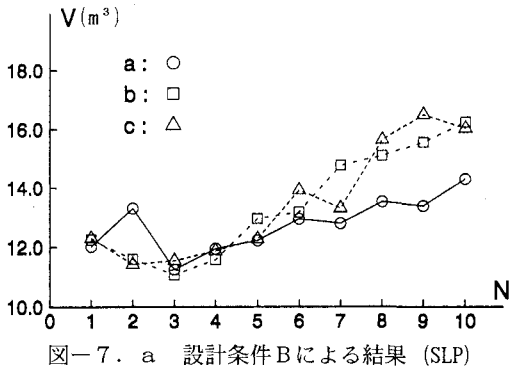
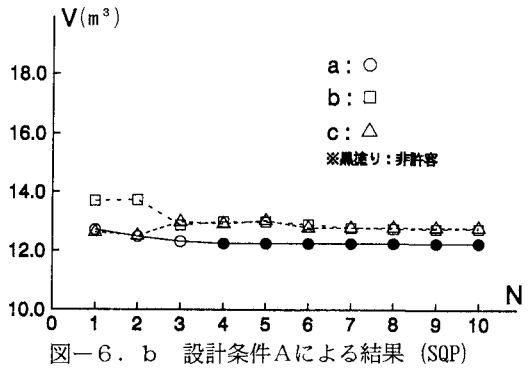
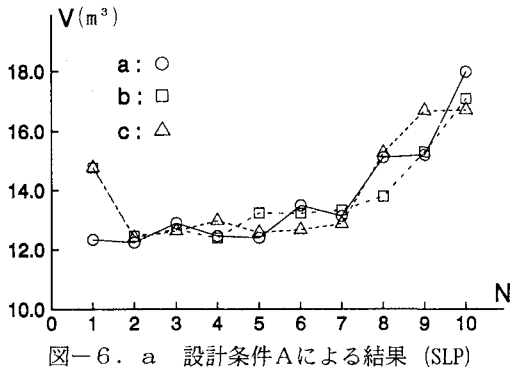
i) 設計条件Aの場合

この場合の数値計算による感度解析

の省略回数 N と目的関数V (m^3)の関係を図－6. a、図－6. bに示す。まず、図－6. aに示したSLPによる最適化の結果においては、初期値aでは $N = 1 \sim 5$ まではそれほど大きく解の変化は見られない。ま



図－5 79部材トラス



た、初期値b、cにおいても $N=1$ に対し $N=2$ で目的関数の値はかなり大きく改良し、それ以降 $N=7$ までは解の改良は続いている。しかしこの3つの初期値条件すべてにおいて $N=8$ 以上になるとかなり目的関数の値が大きく変化している。次に図-6. bにおけるSQPでの結果であるが、これについては初期値aにおける $N=4$ 以上ではすべて非許容解となっているが、他の初期値条件においては、目的関数は感度解析を省略することによる影響をほとんど受けていないものと考えられる。

ii) 設計条件Bの場合

この場合における感度解析の省略回数 N と目的関数 $V(m^3)$ の関係を示しているのが、図-7. a、図-7. bである。まず、図-7. aのSLPによる結果を見ると、初期値aによる $N=2$ の場合を除くとすべての初期値条件において、数回の感度解析の省略による目的関数への大きな影響は見られないが、それ以降

については少なからず線形近似の誤差による影響が表れている。また、SQPによる最適化においても、初期値bでは上記とほぼ同様のことが言えるが、他の2つの初期値条件においては、非許容解となる場合を除くと、SLPの場合に対して比較的目的関数には大きく影響を及ぼしていない。

表一6 79部材トラス：設計条件C-(a)の結果

N	1	2	3	4	5
目的関数V (m ³)	11.60	11.24	12.01	13.02	13.05
繰返し計算回数	7	9	8	7	10
感度解析回数	7	5	3	2	2
構造解析回数	289	211	130	89	92

iii) 設計条件Cの場合

この場合の感度解析の省略回数Nと目的関数V (m³)の関係を、図一8. a、図一8. bに示す。これよりまず、図一8. aにおけるSLPによる結果を見ると、上記の設計条件A、Bの場合とほぼ同じ傾向になっている。また、図一8. bにおけるSQPによる最適化では、N=1の場合に比較して目的関数の値は最大でも初期値cにおけるN=4の場合の約7%程度の変化であり、全体的には感度解析の省略による目的関数への影響は比較的小さいと考えられる。

また、この時のSLPによるN=1~5の場合の目的関数、各繰返し計算回数、各計算において実際に行われた感度解析回数および構造解析回数を表一6に示した。ここで表中のN=1、2、3の場合を比較すると、N=1を基準にした場合、目的関数の値はN=2、3では約3~4%程度の変化であるのに対し、その構造解析回数はそれぞれ約27%、55%程度の減少が見られる。

以上のようなことから、設計条件A、B、Cにおける結果より、各目的関数の値の変化は、各手法毎にほぼ同様な傾向を示していると考えられる。また、これらの数値計算例から、1回の繰返し計算に対し数回の感度解析の省略を行っても、感度解析を各繰返し計算毎に毎回行う場合に得られる解と比較して、それほど大きく影響を受けることはないと考えられる。

6. あとがき

本研究では、構造最適設計において多大な計算時間を要する感度解析における計算時間の効率化を図るために、1回の繰返し計算過程により計算された微係数を次回以降数回の繰返し計算過程においてそのまま使用するという感度解析の省略が可能ではないかという考えに基づき、トラス構造物による数値計算例からその有効性について考察を加えた。

その結果、感度解析の省略については、1回の繰返し計算における微係数を、次回以降数回の繰返し計算過程にそのまま使用し得られる解においては、比較的その影響は小さく、信頼性もある程度保証される解であるということが数値計算例からも説明された。これにより大規模構造物等の設計においては、特にこの感度解析において、より多大な計算時間がかかることから、計算時間の効率化を図るためにも感度解析の省略を行うことは有効ではないかと考えられる。

参考文献

- 1) 土木学会：構造システムの最適化～理論と応用～、構造工学シリーズ1、1988.
- 2) Vanderplaats, G.N: Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Application, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- 3) Vanderplaats, G.N and H. Sugimoto: A General-Purpose Optimization Program for Engineering Design, Computers and Structures, Vol. 24, No. 1, pp. 13-21, 1986.
- 4) 林 正・平山 博：立体骨組構造物の大規模設計問題における実用的最適化計算法、土木学会論文集、No. 437/I-17, pp133-142, 1991.
- 5) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説、丸善株式会社、1980.