

I-18

吊橋、曲げねじり、不完全合成桁の
解析理論の類似性について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一

1. まえがき

吊橋の曲げ解析理論^{1), 2), 3)}、直線梁の曲げねじり解析理論⁴⁾および不完全合成桁の曲げ解析理論⁵⁾に関してはそれぞれ個別に研究されており、系統的な記述はあまりされていない。本論文の目的はこれらの解析理論を網羅して、類似点を示すと同時に、これらの類似点を考慮して、系統的に解析するための2つの手法を示すものである。即ち、第一はGreen関数を用いて積分変換する方法であり、第二は剛性マトリックス法を用いる方法である。そのためにGreen関数と剛性マトリックスを示し系統的解析手法を述べるものである。

2. 吊橋の曲げ解析理論(弾性理論、撓度理論、線形化撓度理論)

図-1に示すような吊橋の曲げ解析理論において、ケーブルおよび補剛桁の死荷重が吊橋の長さ方向に等分布しているものとすれば、ケーブルの形状は二次放物線となり⁶⁾、死荷重はすべてケーブルによって受け持っているので、補剛桁には死荷重応力が生じていない⁶⁾。活荷重によってはじめて補剛桁に応力が生じることになる。従って、活荷重による変形や断面力を求めることが問題となる。その場合そのスパン長によって適用する解析理論に差がある。即ち、弾性理論と撓度理論と線形化撓度理論とがある。なお、温度変化は考慮しない。また、塔の変形を考慮した場合の研究もあるが⁷⁾、ここでは塔の変形を考慮しない解析理論に限定する。

2.1 弾性理論

短支間吊橋においては活荷重が作用してもケーブルの形状が変化しないと仮定し、弾性方程式により解く方法であり、これを弾性理論という。通常、これらの挙動は、補剛桁の曲げに関する基礎微分方程式、およびケーブルの伸びに関する積分方程式として表されたいわゆるケーブル方程式の次の2本によって表現される。

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p(x) + H_p \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad \dots (1)$$

$$H_p \frac{L_c}{E_s A_s} + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \int_c^L w(x) dx = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{ここで、} L_c = \int_c^L \frac{dx}{\cos^3 \phi} \quad \dots (3)$$

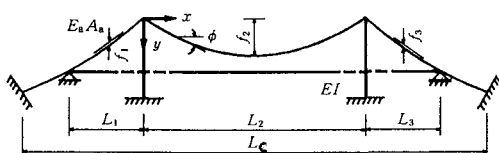


図-1 吊橋の解析に用いる諸元

である。また、 $w(x)$ は活荷重による補剛桁およびケーブルの鉛直方向たわみ、 EI は補剛桁の曲げ剛性(補剛桁の半分に相当する分)、 E_s はケーブルのヤング係数、 A_s はケーブルの断面積、 H_g は死荷重 g によるケーブルの水平張力、 H_p は活荷重 $p(x)$ によるケーブルの水平張力、 $p(x)$ は分布活荷重強度、 $L = \sum_{i=1}^n L_i$ はケーブルの水平投影長である。これらは以降の撓度理論および線形化撓度理論にも適用できる。また、ケーブルの方程式は二次放物線であるので、 f_i をサグとすれば、

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = y'' = -\frac{8 f_i}{L_i^2} = -\frac{g}{H_g} \quad \dots (4)$$

On Similarity in Theory among Suspension Bridges, Warping Torsion of Straight Beams and Partial Composite Girders by Koichi SATO

2.2 撓度理論

長大吊橋の補剛桁に活荷重が作用すると、それを吊り下げているケーブルが著しく変位して元のケーブル形状と異なったものとなり、この変形によつて外力との釣合が保たれることになる。この変位の影響を考慮して、ケーブル張力や補剛桁のたわみ、曲げモーメント、およびせん断力などの変位量、断面力を求めればより合理的で経済的な吊橋の設計が可能となるので、このような場合にはいわゆる撓度理論に基づいて諸量を求めなければならない。通常、これらの挙動は、弾性理論の場合と同様に補剛桁の曲げに関する基礎微分方程式およびケーブルの伸びに関する積分方程式として表されたいわゆるケーブル方程式によつて表現される。そして、相当な非線形挙動を呈することが多くの研究者によつて明らかにされている。図-1に示す吊橋の補剛桁のたわみに関する撓度理論による基礎方程式は、1888年メラン(J. Melan)によつて発表されたものが有名であり、次式で与えられた。

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - H \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p(x) + H_p \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad \cdots \cdots (5)$$

$$H_p \frac{L_c}{E_a A_a} + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \int_c^L w(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots (6), \quad H = H_g + H_p \quad \cdots \cdots (7)$$

ここで、式(5)において $H=0$ とすれば、弾性理論の式(1)になることがわかる。従つて、弾性理論は撓度理論の特別の場合として取り扱える。

式(5), (7)の H_p は未知であり、これを定めるためには、式(6)で与えられるケーブル方程式を満足させなければならない。しかし、この理論の応用は、非常に有用な重ね合わせの法則がそれを適用する場合に制限をうける。例えば、 $P=1$ によるたわみを求めてこれに P を乗ずることによつて、集中荷重 P によるたわみをもはや決定できない。それと同時に橋梁力学の影響線を利用することが出来ない。しかし、必要でまた最も不利な荷重状態は各荷重に対して他の非線形の値をとる水平張力の大きさにはほとんど関係しない、いわゆる1次近似影響線から明らかにされる。したがつて、影響線の適用が再び可能である。3つの第1近似影響線の使用で、要求された量について実用的に十分な値を与えることがわかつている。また、ただ、2つの1次近似影響線を使用することで十分であることもわかっている¹⁾。

この理論によつて最初に建設された吊橋はアメリカのニューヨークにあるマンハッタン橋(1909年、中央支間長450m)である。その後、撓度理論によつて設計された吊橋は中央支間長の急速な拡大をもたらし、1931年には中央支間長1067mを有するジョージワシントン橋がニューヨークに誕生し、そのわずか6年後には中央支間長1280mのゴールデンゲート橋がサンフランシスコに建設された。1981年には現在世界第1位の中央支間長(1410m)を有するハンバー橋がイギリスに誕生した。また、近い将来デンマークにおいて中央支間長1624mのグレートベルト東橋や日本において明石海峡大橋が完成する予定である。

2.3 線形化撓度理論

式(5)の非線形方程式を線形化するため(Bleich の線形化撓度理論という)、式(7)の H_p を零とする。ただし、ケーブルの方程式は式(2)と式(6)と同形である。

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - H_g \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p(x) + H_p \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad \cdots \cdots (8)$$

$$H_p \frac{L_c}{E_a A_a} + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \int_c^L w(x) dx = 0 \quad \cdots \cdots (9)$$

2. 直線梁の曲げねじり解析理論

図-2に示すような薄肉断面で構成された一般的な断面

を有する梁に、トルクを作用させたとき、その梁に生じるねじりモーメントの一部分は、純ねじりモーメントで、他はそりねじりモーメントで分担している。このうち、純ねじりモーメントは、断面内にせん断応力のみを生じさせる。しかし、そりねじりモーメントは、梁軸方向にそりねじりによる垂直応力と、これにつり合うための二次的なせん断応力を生じさせる。この曲げねじりの挙動を解明するために、曲げねじり理論が展開されている^{4), 6)}。薄肉直線桁に分布トルク $m(x)$ が作用したとき、ねじり角に関する微分方程式は、次式で表される⁶⁾。

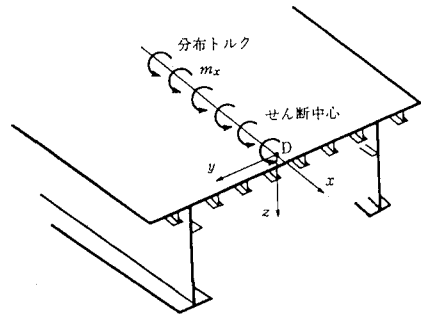


図-2 曲げねじり解析における座標系

$$\frac{d^4 \theta(x)}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 \theta(x)}{dx^2} = \frac{m(x)}{E I_w} \quad \dots\dots(10a), \quad \text{ここで、} \kappa^2 = \frac{G J}{E I_w} \quad \dots\dots(10b)$$

E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 $\theta(x)$ はねじり角、 I_w はそりねじり定数、 J は純ねじり定数、 $m(x)$ は分布トルク、パラメータ κ はねじりに関する断面定数比。

3. 不完全合成桁の曲げ解析理論

図-3は本論文で用いる合成桁とその断面図である。

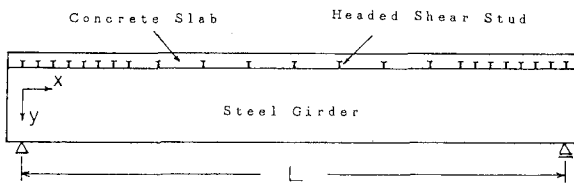


図-3(a) 合成桁

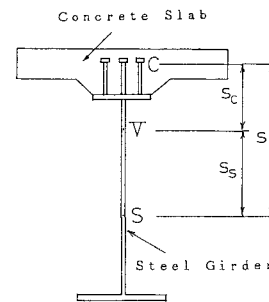


図-3(b) 合成桁の断面図

図-3に示すような完全合成桁と考え場合のたわみ $w_v(x)$ に関する微分方程式は次式で表示される。

$$\frac{d^4 w_v(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{E_s I_v} \quad \dots\dots\dots(11)$$

また、図-3に示すような不完全合成桁と考え場合のたわみ $w_{ve}(x)$ に関する微分方程式は次式で表示される^{5), 8), 9)}。

$$E_s I_v \frac{d^4 w_{ve}(x)}{dx^4} - \kappa^2 \cdot E_s I_v \frac{d^2 w_{ve}(x)}{dx^2} = -\kappa^2 \cdot E_s I_v \frac{d^2 w_v(x)}{dx^2} + \frac{n I_v}{n I_s + I_c} p(x) \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 E_s は鋼のヤング率、 I_v は合成桁の断面二次モーメント、 $p(x)$ は分布活荷重強度。文献⁵⁾と同様に考えて、完全合成桁の場合のたわみが $w_v(x)$ であり、ジベルの弾性変形を考慮した場合のたわみが $w_{ve}(x)$ であり、 $w_{ve}(x)$ と $w_v(x)$ との差を $w_e(x)$ とすれば、 $w_v(x)$ に関しては式(11)が成立する。また、 $w_e(x)$ に関しては式(11)と式(12)との差より

$$E_s I_v \frac{d^4 w_e(x)}{dx^4} - \kappa^2 \cdot E_s I_v \frac{d^2 w_e(x)}{dx^2} = \frac{A_c S_c S}{n I_s + I_c} p(x) \quad \dots\dots\dots(13)$$

となる。結局、式(12)は次の2個の常微分方程式になる。

$$\begin{cases} \frac{d^4 w_v(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{E_s I_v} & \dots\dots\dots(14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 w_o(x)}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 w_o(x)}{dx^2} = \frac{p(x)}{E_s I_o} & \dots\dots\dots(15) \end{cases}$$

ただし、 $I_o = I_v \frac{n I_s + I_o}{A_c s_c s}$, $n = \frac{E_s}{E_c} \dots\dots(16)$, $\kappa^2 = \frac{n I_v}{n I_s + I_o} \frac{K n s}{E_s A_c s_c} \dots\dots(17)$

ここで、K はジベルのばね定数、 A_c はコンクリートの断面積、 I_s は鋼桁の中立軸に関する断面二次モーメント、 I_o はコンクリート部の中立軸に関する断面二次モーメント。

たわみは次式で求まる。

$$w_{vo}(x) = w_v(x) + w_o(x) \quad \dots\dots\dots(18)$$

4. 各解析理論の類似性およびGreen関数と剛性マトリックス

吊橋の弾性理論における式(1)と完全合成桁における式(11)あるいは式(14)は同形である。即ち、ベルヌーイ・オイラー・ビームである。単径間の場合のGreen関数は次式のとおりである。ここでは、式(1)と式(11)のたわみを $G_E(x, \xi)$ とおいた。また、式(1)と式(11)の曲げ剛性を $E I$ と読みかえる。

$$G_E(x, \xi) = \frac{L^3}{6 E I} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2\right] + \left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{L}\right)^3 E(x - \xi) \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 $E(x - \xi)$ はステップ関数である。

吊橋の撓度理論における式(5)と線形化撓度理論における式(8)と曲げねじり理論における式(10)と不完全合成桁における式(15)は同形であることがわかる。単径間の場合のGreen関数は次式のような。ここでは、式(8)と式(15)のたわみおよび式(10)のねじり角を $G_D(x, \xi)$ と読みかえる。

$$G_D(x, \xi) = \frac{L}{H} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \frac{x}{L} - \frac{\sinh \kappa (L - \xi) \cdot \sinh \kappa x}{\kappa L \cdot \sinh \kappa L} + \left[\frac{\sinh \kappa (x - \xi)}{\kappa L} - \left(\frac{x}{L} - \frac{\xi}{L}\right) \right] E(x - \xi) \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

式(20)での H は表-1 のようであり、 κ^2 は表-2 のようであり、 $E I$ は表-3 のようである。

表-1 式(20)における H の値

	式(5)の場合	式(8)の場合	式(10)の場合	式(15)の場合
H	死荷重 g と活荷重 p によるケーブルの水平張力 H	死荷重 g によるケーブルの水平張力 H_g	ねじり剛性 G J	$\kappa^2 \cdot E_s I_o$

表-2 式(20)における κ^2 の値

	式(5)の場合	式(8)の場合	式(10)の場合	式(15)の場合
κ^2	$\frac{H}{E I}$	$\frac{H_g}{E I}$	$\frac{G J}{E I_w}$	$\frac{n I_v}{n I_s + I_o} \frac{K n s}{E_s A_c s_c}$

表-3 式(20)における EI の値

	式(5)の場合	式(8)の場合	式(10)の場合	式(15)の場合
EI	EI	EI	EI _w	E _s I _o

なお、Green関数の中で用いられている L は図-1、3などにおける支間長である。また、

$$G_E(x, \xi) = \lim_{H \rightarrow c} G_D(x, \xi) \quad \dots\dots\dots (21)$$

の関係が存在していることは確認している。式(21)より各解析理論の Green関数 を系統的に $G(x, \xi)$ とおけることになる。なお、連続桁の場合の Green関数はここでは省略する。

4.1 Green関数の積分変換による方法

吊橋の解析の場合、即ち、式(1),(5),(8)の場合 H_p はまだ未知であるが、荷重 $\{p(x) + H_p y''\}$ が作用している桁の問題に帰着できる。また、完全合成桁の場合、即ち、式(11)あるいは式(14)の場合、荷重 $p(x)$ が作用する桁の問題に帰着できる。また、式(10)と式(15)の場合、荷重 $m(x)$ あるいは $p(x)$ が作用する桁の問題に帰着できる。従って、たわみあるいはねじり角は Green関数を用いて積分変換すれば次式で求まる。

$$v(x) = P \cdot G(x, \xi) + p \int_c^L G(x, \xi) d\xi + H_p \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \int_c^L G(x, \lambda) d\lambda \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし、式(10)と式(15)の場合は式(22)の第三項を省略すればよい。

さらに吊橋の解析の場合、未知の H_p を求めなければならない。

弾性理論の場合には式(1)と式(2)を連立させ、撓度理論の場合は式(5)と式(6)を連立させ、線形化撓度理論の場合は式(8)と式(9)を連立させ、 $w(x)$ を求める。

それには次のようにして求める。式(22)の $v(x)$ を H_p が未知のまま式(2)あるいは式(8)に代入すれば、 H_p は次式で求まる。

$$H_p = B/N \quad \dots\dots (23), \quad N = L_c/E_s A_s + (y'')^2 \int_c^L \int_c^L G(x, \lambda) d\lambda dx \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$B = -P y'' \int_c^L G(x, \xi) d\xi - p y'' \int_c^L \int_c^L G(x, \xi) d\xi dx \quad \dots\dots\dots (25)$$

式(6)による H_p の求め方は式(8)を用いて式(23),(24),(25)を求め、式(7)に代入して H をまず求める。

H_g のかわりにこの H を式(5)に代入し、式(23),(24),(25)を用いれば、第二回目の H_p が求まる。

この操作をある値に収束するまで繰り返す。それには直線補間法などを用いて逐次近似して求められる。

式(23) で求まる H_p を式(22)に代入すれば、 $v(x)$ が求まる。

式(22) を微分していくことによって、たわみ角、曲げモーメント、せん断力が求まる。

4.2 剛性マトリックスによる方法

式(1)と式(11)あるいは式(14)の一般解は次の3次の多項式で表される。

$$v(x) = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \quad \dots\dots\dots (26)$$

従って、式(1)と式(11)あるいは式(14)の剛性マトリックスは次のとおりである。

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(L) \\ v'(L) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで、EI は式(1)の場合はEIであり、式(11)の場合はEI_vである。

次に、式(5)、(8)、(10)、(15)の一般解は次式で表される。

$$v(x) = A_1 \sinh \kappa x + A_2 \cosh \kappa x + A_3 x + A_4 \quad \dots\dots\dots (28)$$

従って、式(5)、(8)、(10)、(15)の剛性マトリックスは次のとおりである。

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(L) \\ M(L) \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & -k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & -k_{23} & k_{24} \\ -k_{31} & -k_{32} & k_{33} & -k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & -k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(L) \\ v'(L) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $D = H^2 / (2 - 2 \cosh \kappa L + \kappa L \sinh \kappa L)$, $k_{11} = k_{13} = k_{33} = k_{31} = \kappa \cdot \sinh \kappa L / H$, $k_{12} = k_{21} = k_{23} = k_{32} = k_{14} = k_{41} = k_{34} = k_{43} = (\cosh \kappa L - 1) / H$, $k_{22} = k_{44} = (\kappa L \cdot \cosh \kappa L - \sinh \kappa L) / (H \cdot \kappa)$, $k_{24} = k_{42} = (\sinh \kappa L - \kappa L) / (H \cdot \kappa)$..(30)

また、H は表-1に示すものであり、 κ は表-2に示すものである。

次に、式(5)、(8)、(10)、(15)の解を次の3次の多項式で表示されたとすれば

$$v(x) = A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4 \quad \dots\dots\dots (31)$$

式(29)の剛性マトリックスの各要素は次のようになる。

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_{13} = k_{33} = k_{31} = 12EI/L^3 + 6H/5L, \\ k_{12} &= k_{21} = k_{23} = k_{32} = k_{14} = k_{41} = k_{34} = k_{43} = 6EI/L^2 + H/10, \\ k_{22} &= k_{44} = 4EI/L + 2HL/15, \quad k_{24} = k_{42} = 2EI/L - HL/30 \quad \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

また、Hは表-1に示すものであり、 κ は表-2に示すものであり、EIは表-3に示すものである。

なお、変位ベクトルと節点力ベクトルは文献⁹⁾の図-3(b)に示すような場合をプラスとする。また、L は一要素長である。

5. あとがき

吊橋の曲げ解析理論、直線梁の曲げねじり解析理論および不完全合成桁の曲げ解析理論の類似点を表-1, 2, 3のように系統的に示すことができる。計算例は紙面の都合で省略したが、各参考文献を参照されたし。

最後に、本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献 1) A.ハウラネック/0.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算(橋 善雄、小松定夫共訳)、山海堂、1965. 2) 平井 敦：鋼橋(Ⅲ)、技報堂、1967. 3) 小西一郎 編：鋼橋 設計編Ⅱ、丸善株式会社、1976. 4) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算、山海堂、1969. 5) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973. 6) 中井 博、事口壽男：伝達マトリックス法による鋼橋の解析、森北出版、1992. 7) 佐藤浩一：塔の変形を考慮した多径間吊橋の撓度理論と各種影響線の計算、土木学会論文報告集、190号、pp.11-22、1971. 8) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A、pp.1223-1236、1990.3. 9) 佐藤浩一：不完全合成桁橋の解析法の比較について、北海道大学工学部研究報告、第158号、pp.1-11、1992. 10) Newmark, N.M., Siess, C.P., Viest, I.M. : Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951. 11) 鷺津久一郎、宮本博、山田嘉昭、山本善之、川井忠彦 共編：有限要素法ハンドブックⅠ 基礎編、培風館、1983.