I －17

合成板の合成度とその適用について

北海道大学工学部　正員　佐藤　浩一
北海道大学工学部　正員　及川　昭夫
北海道大学工学部　正員　小幡　卓司
北海道大学工学部　正員　平沢　秀之

1．まえがき

本論文では、等方性材料であり、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。合成桁において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析いるので[1)]、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用いることができるものと考える。従って、接着が完全に剛であるならば、完全合成二層板と考えることができる。ここでは接着は完全に剛でなく接着剤の変形を考慮した場合の合成二層板について考える[2)]。以下、不完全合成二層板という。このような考えに基づいた不完全合成二層板の合成度に関する簡単な実用的評価式についての研究はされていないようである。

そこで、本論文は全周辺単純支持の長方形板の合成度に関する非常に簡単な代数式で表示される実用的評価式を誘導し、系統的に長方形板の静的解析および座屈解析とが同時にできることを示すものである。具体的には、構造物の静的解析および座屈解析ごとに無次元量として α，β，γ なるパラメータを示し、これらのパラメータは両解析において同一になることを示すものであり、数値解析により不完全合成二層板の特性を示す。即ち、無次元量の $\alpha=1$ の場合が完全合成二層板であり、 $0<\alpha<1$ の場合が不完全合成二層板であり、 $\alpha=0$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。数値解析にはパソコンを用いるまでもなく、電卓で十分である。また、新しい型のジベルを用いた合成床版の合成度の評価[3)]に文献[4)]を適用している。この文献[4)]を更に利用しやすい代数式で表示したものが、本論文の合成度に関する実用的評価式であるので、適用性は広いものと思われる。

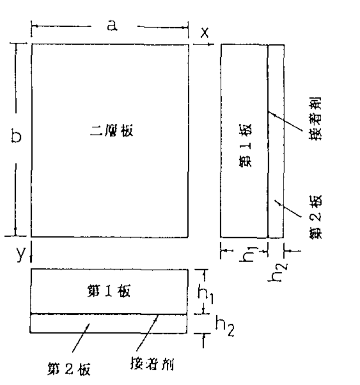
2．面外荷重と面内荷重を受ける不完全合成二層長方形板のたわみに関する偏微分方程式

図－1は本解析で用いる第一板と第二板とが接着剤で合成された二層長方形板を示している[5),6)]。ここで、接着剤のばね定数 K は Newmark[8)]による押し抜きせん断試験により求めるものとする。

$$\kappa^2=K\frac{\bar{n}I_v}{\bar{n}I_2+I_1}\frac{\bar{n}}{\bar{E}_2A_1}\frac{s}{s_1}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$D_v=\bar{E}_2I_v,\ D_e=D_v\ (\bar{n}I_2+I_1)/A_1s_1s\ ,$$
$$\bar{E}_2=E_2/(1-\nu_2{}^2),\ \bar{E}_1=E_1/(1-\nu_1{}^2),\ \bar{n}=\bar{E}_2/\bar{E}_1,$$
$$I_v=I_2+I_1/\bar{n}+A_2s_2s=I_2+I_1/\bar{n}+A_1s_1s/\bar{n}=$$
$$I_2+I_1/\bar{n}+A_vs_1s_2\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

記号は式(1),(2)のとおりとする。式(1) の D_v は文献[9)]の p.5 および文献[10)]の p.391 にある二層板の場合のD_vと一致することを確認してある。図－2に示すような面内力 p_{vex} と p_{vey} が作用する合成二層長方形板を考える。この場合の偏微分方程式は次のようになる[7)]。



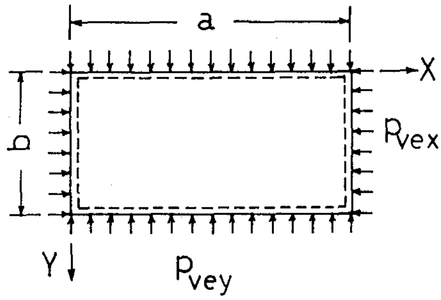
図－1　合成二層板

On Composite Degree and Its Application to Analyses of Composite Plates
by Koichi SATO, Akio OIKAWA, Takashi OBATA and Hideyuki HIRASAWA

$$\nabla^4 w_v(x,y)=\frac{1}{D_v}\left[p_z(x,y)-p_{vx}\frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial x^2}-p_{vy}\frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial y^2}\right] \quad \cdots(3)$$

$$\nabla^4 w_e(x,y)-\kappa^2\nabla^2 w_e(x,y)=\frac{1}{D_e}\left[p_z(x,y)-p_{ex}\frac{\partial^2 w_e(x,y)}{\partial x^2}-p_{ey}\frac{\partial^2 w_e(x,y)}{\partial y^2}\right] \quad \cdots(4)$$

ここで、 $$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \cdots\cdot(5)$$



図－2　面内荷重 p_{vex} と p_{vey} が作用する全周辺単純支持合成二層長方形板

3．全周辺単純支持の不完全合成二層長方形板の静的および座屈解析

3.1　静的解析における $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、式(1),(2)の平板のたわみ曲面を次式のように仮定する。

$$w_v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}{}_vW_{mn}\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b} \cdots\cdot(6),\qquad w_e=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}{}_eW_{mn}\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b} \cdots\cdot(7)$$

式(1),(2) において、横荷重 $p_z(x,y)=p_z$(等分布満載荷重の場合)ならば、式(6),(7)の ${}_vW_{mn}$、${}_eW_{mn}$ は次のように求まる[11)]。

$${}_vW_{mn}=\frac{16p_z}{D_v\pi^6\cdot m\cdot n\cdot(A-B)} \cdots\cdot\cdot(8),\qquad {}_eW_{mn}=\frac{16p_z}{D_e\pi^6\cdot m\cdot n\cdot(A-B+C)} \cdots\cdot(9)$$

$$A=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \cdots\cdot(10),\qquad B=\frac{p_{vx}\,m^2}{\pi^2D_va^2}+\frac{p_{vy}\,n^2}{\pi^2D_vb^2} \cdots\cdot(11)$$

$$C=\frac{\kappa^2}{\pi^2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \cdots\cdot(12)$$

式(8),(9)において、$p_{vx}=p_{vy}=0$、$p_{ex}=p_{ey}=0$ とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、式(8),(9)において、第1項のみをとり[12)]、次のような比をとる。

$$\gamma_{11}=\frac{w_e(0.5a,0.5b)}{w_v(0.5a,0.5b)}=\frac{{}_eW_{11}}{{}_vW_{11}}=\frac{D_v}{D_e}\beta_{11}=\frac{A_1s_1s}{\bar{n}\,I_2+I_1}\cdot\beta_{11} \cdots\cdots\cdots(13)$$

ここで、

$$\beta_{11}=\frac{1}{1+\dfrac{\kappa^2}{\pi^2\mu_{11}^2}}=1-\alpha_{11} \cdots\cdot(14),\qquad \mu_{11}^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \cdots\cdots\cdots(15)$$

不完全合成二層板の変形は、w_v と w_e との代数和で計算される[13)]。従って、たわみ w_{ve} は

$$w_{ve}=w_v+w_e=w_v\cdot(1+\gamma_{11}) \cdots\cdots(16)$$

で求まる。また、w_v は完全合成二層板の換算板剛性 D_v に反比例するのは明らかである。

3.2 座屈解析における $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

式(8),(9)において、分母を零とする p_{vx} と p_{vy} 、p_{ex}とp_{ey} の限界値が座屈荷重である。

$$\frac{(p_{vx})_{cr}\,m^2}{\pi^2D_va^2}+\frac{(p_{vy})_{cr}\,n^2}{\pi^2D_vb^2}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \cdots\cdots(17)$$

$p_{vx}=p_{vy}=p_v$の場合、

$$(p_v)_{cr}=\pi^2 D_v\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \quad\cdots\cdots(18)$$

また、式(9)において、分母を零とする p_{ex} と p_{ey} の限界値が座屈荷重である。

$$\frac{(p_{ex})_{cr}\ m^2}{\pi^2 D_e a^2}+\frac{(p_{ey})_{cr}\ n^2}{\pi^2 D_e b^2}=\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2+\frac{\kappa^2}{\pi^2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \quad\cdots\cdots(19)$$

$p_{ex}=p_{ey}=p_e$の場合、

$$(p_e)_{cr}=\pi^2 D_e\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{\kappa^2}{\pi^2}\right) \quad\cdots\cdots(20)$$

のような比をとり、式(1)を代入すれば、

$$\gamma_{11}=\frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}}=\frac{D_v}{D_e}\cdot\beta_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n}\ I_2+I_1}\cdot\beta_{11} \quad\cdots\cdots(21)$$

ここで、

$$\beta_{11}=\frac{1}{1+\dfrac{\kappa^2}{\pi^2\mu_{11}{}^2}}=1-\alpha_{11} \quad\cdots\cdots(22), \qquad \mu_{11}{}^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \quad\cdots\cdots(23)$$

ここで、式(21),(22),(23)と式(13),(14),(15)を比較してみれば、同一であることがわかる。$(p_v)_{cr}$あるいは$(p_e)_{cr}$は単位幅あたりの限界圧縮荷重であり、D_vあるいはD_eは単位幅あたりの板剛性である。限界荷重はD_vあるいはD_eに比例することは明らかである。不完全合成二層長方形板の限界荷重$(p_{ve})_{cr}$は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}}=\frac{1}{(p_v)_{cr}}+\frac{1}{(p_e)_{cr}}=\frac{1}{(p_v)_{cr}}\left[1+\frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}}\right] \quad\cdots\cdots(24)$$

式(21)の γ_{11} を式(24)の $(p_{ve})_{cr}$ に代入すれば

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}}=\frac{1}{(p_v)_{cr}}(1+\gamma_{11})=\frac{1}{(p_v)_{cr}}\left(1+\beta_{11}\cdot\frac{I_{12v}}{I_{12}}\right) \quad\cdots\cdots(25)$$

式(24)における p_v および p_{ve} の添字 "v" および "ve" はそれぞれ完全合成二層板および不完全合成二層板を意味している。

4．数値計算例

材料は特に指定しない。不完全合成二層板の一般的な諸元は次のようであるとする（図－１参照）。長方形板の大きさは $a\times b=3$ m×3 m の正方形板とする。$E_1=3.\times10^6$ ton/m², $E_2=2.1\times10^7$ ton/m², $I_{12}=1.42859\times10^{-6}$ m⁴/m, $I_{12v}=2.49396\times10^{-6}$ m⁴/m, $K=8660$ ton/m/m , $h_1=0.05$ m, $h_2=0.006$ m, $\bar{n}=7.385$, $\nu=0.3$(仮定), $\nu_2=0.3$, $\nu_1=0.2$, $s=0.028$ m, $s_1=0.013155$ m, $s_2=0.014845$ m, $A_1=0.05$ m²/m, $A_2=0.006$ m²/m, $A_v=0.0127708$ m²/m, $I_v=3.92255\times10^{-6}$ m⁴/m, $D_v=90.5205$ ton·m²/m。これらの諸元を用いれば、完全合成二層正方形板の場合は式(1)を用いて、$\kappa=5.69$/m, $\kappa a=17.07$ と求まり、次に式(14),(13)を用いて、$\alpha_{11}=0.9366$, $\beta_{11}=0.0634$, $\gamma_{11}=0.1107$, および $(1+\gamma_{11})=1.1107$ と求まる。完全合成二層正方形板の中央点のたわみは $p_z=10$ ton/m/m として文献[14]より 3.6330 cm と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の中央点のたわみは 3.6330×1.1107=4.0352 cm と求まる。また、完全合成二層正方形板の座屈荷重は文献[11]より 198.53 ton/m と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の座屈荷重は 198.53/1.1107=178.74 ton/m と求まる。以上の数値計算例からもわかるように、電卓と公式集[14]あるいは設計便覧[15]があれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上のたわみおよび座屈荷重を求める場合に非常に便利である。

5．あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

(1) 本論文は全周単純支持の不完全合成二層長方形板（接着剤の弾性変形を考慮した二層板）の合成度を求め、静的解析および座屈解析を合成度を用いて系統的に行う手法を示したものである。

(2) $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ なる無次元量パラメータを用いれば、長方形板の合成度 α_{11} は次式で示すような簡単な代数式で表示できることが判明した。なお、ここでは誘導していないが、正方形板、円板、桁の合成度を表－1に併記しておく。これらについては別の機会に発表する。また、この定数が小さい方が合成度が大きいことがわかる。

$$\alpha_{11}=\frac{1}{1+\dfrac{\text{定数}}{\kappa^2\cdot a^2}}=1-\beta_{11}\quad\cdots\cdot(26),\qquad \beta_{11}=\frac{1}{1+\dfrac{\kappa^2\cdot a^2}{\text{定数}}}=1-\alpha_{11}\quad\cdots(27)$$

表－1　式(26),(27)における定数

	長方形板	正方形板	円板	桁
定数	$(1+\dfrac{a^2}{b^2})\cdot\pi^2$	$2\pi^2$	16.80	π^2

(3) 完全合成二層板、不完全合成二層板、重ね二層板のたわみおよび座屈荷重の相互関係を明らかにした。即ち，$\alpha_{11}=1$ の場合が完全合成二層板であり、$0<\alpha_{11}<1$ の場合が不完全合成二層板である。$\alpha_{11}=0$ の場合が重ね二層板であり、また、両解析において無次元量は同一である。

(4) 数値計算は電卓と公式集[14]あるいは設計便覧[15]などがあれば十分可能である。

最後に、本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇 名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献

1) A.ハウラネック/O.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算（橘　善雄、小松定夫共訳）、山海堂、1965. 2) 佐藤浩一 ：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、構造工学論文集 Vol.38A、pp.1309-1320、1992. 3) 中井　博、杉山　功、広瀬鉄夫、山本晃久：トラス型ジベルを用いた合成床版の耐荷力試験、土木学会第45回年次学術講演会講演概要集、Ⅰ-273、pp.576-577、1990. 4) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60 、1989. 5) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集　Vol.36A、pp.1245-1258、1990. 6) Koichi SATO：Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991. 7) Koichi SATO：Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992. 8) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951. 9) K.S.Pister and S.B.Dong： Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959. 10) Rudolph Szilard：Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974. 11) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger：Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970. 12) 佐藤浩一：不完全合成板の簡易計算法について、土木学会第47回年次学術講演会講演概要集、Ⅰ-78、pp.332-333、1992. 13) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973. 14) 構造力学公式集、土木学会編、1986. 15) 関谷　壮、浜田　実、角　誠之助 編：平板構造強度設計便覧、朝倉書店、1982.