

I-16

不完全合成円板の座屈解析について

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一
(株) 鋼路製作所 正員 井上 稔康
(株) 鋼路製作所 杉江 豊

1. まえがき

本論文では等方性材料であり、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の円板を接着剤で合成した合成円板を考える。接着が完全に剛であるならば、完全合成円板と考えることができる。この場合、合成円板の単位幅あたりの換算板剛性が求まっていれば、完全合成円板の座屈解析は簡単である^{(1), (2)}。ここでは接着は完全に剛でなく接着剤の変形を考慮した場合の合成円板について考える（以下、不完全合成円板という）。接着剤の変形を考慮した場合の不完全合成板の解析例として長方形板の座屈解析がなされているが^{(3), (4)}、不完全合成円板の座屈解析についての報告はない。

そこで、本論文は不完全合成円板の座屈解析理論を示し、全周辺単純支持の不完全合成円板の座屈解析を行うものである。具体的には、不完全合成円板の座屈解析における無次元量として α, β, γ なるパラメータを示し、また、数値解析により不完全合成円板の座屈特性を示す。即ち、無次元量の $\alpha = 1$ の場合が完全合成円板であり、 $0 < \alpha < 1$ の場合が不完全合成円板であり、 $\alpha = 0$ の場合が重ね円板であることを示すものである。

2. 不完全合成板の面外荷重による解析理論（偏微分方程式）

図-1、2 は本解析で用いる第1板と第2板とが接着剤で合成された長方形板（合成二層板）を示している。

$$\nabla^2 \nabla^2 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ここで } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

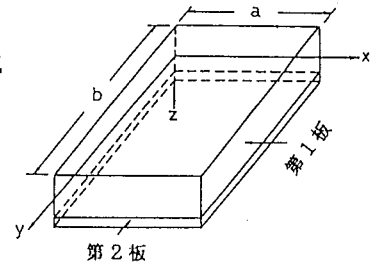


図-1 長方形合成板

式(2) は直交座標における Laplace 演算子である。

接着剤のばね定数 K は Newmark⁽⁵⁾ による押し抜きせん断試験により求めるものとし

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{E_2 A_1} \frac{s}{s_1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

とおく^{(6), (7), (8)}。この κ は本論文の目的である座屈解析における重要なパラメータの一つである。不完全合成板（接着剤の弾性変形を考慮した場合の合成板）のたわみ $w_{ve}(x, y)$ で整理すれば、

$$D_v \nabla^4 w_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 D_v \nabla^2 w_v(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad \dots\dots\dots (4)$$

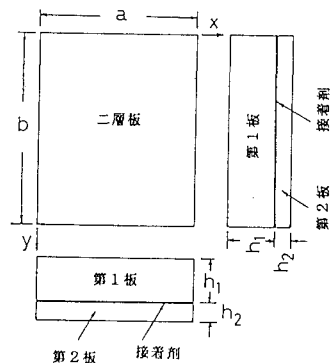


図-2 長方形合成板

となる。また、式(4)に ∇^2 を施せば

$$D_v \nabla^6 w_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^4 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 p_z(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \nabla^2 p_z(x, y) \quad \dots\dots (5)$$

となる。式(4)あるいは式(5)が不完全合成板のたわみに関する偏微分方程式である。ここで、完全合成板の場合の文献⁹⁾の考え方を適用する。完全合成板の場合のたわみが $w_v(x, y)$ であり、不完全合成板の場合のたわみが $w_{ve}(x, y)$ であり、 $w_{ve}(x, y)$ と $w_v(x, y)$ との差を $w_e(x, y)$ とすれば、 $w_v(x, y)$ に関しては式(1)、即ち、式(7)が成立する。また、 $w_e(x, y)$ に関しては式(4)と式(1)との差より、

$$D_v \nabla^4 w_e(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。結局、式(4)は次の2個の偏微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \quad \dots\dots\dots (7) \\ \nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_e} \quad \dots\dots\dots (8) \end{array} \right.$$

ただし、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$, $D_e = D_v \frac{\bar{n} I_2 + I_1}{A_1 s_1 s}$, $\dots\dots\dots (9)$
 $\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2)$, $\bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2)$, $\bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1$,
 $I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2$

式(9)の D_v は文献¹⁰⁾の p.5 および文献¹¹⁾の p.391 にある二層板の場合の D_v と一致することを確認してある。式(8)は面外荷重($p_z(x, y)$)が作用する他に面内荷重(引張力)に相当する $D_e \cdot \kappa^2$ が合成断面の中立面に作用する平板に対する基礎偏微分方程式と同形である。

3. 不完全合成円板の面外荷重による解析理論 (常微分方程式)

平板のたわみ問題は一般的には2個の独立変数 x と y に関する二次元問題であるが、円板に軸対称荷重が作用し、また円板の支持方法も軸対称である場合には、1個の独立変数 r に関する一次元問題となり、桁の場合と同様に簡単に解ける。円板を解析する場合、式(1)の支配方程式を図-3に示すように極座標で表示すれば、便利である。式(1)から式(8)までの Laplace 演算子 ∇^2 を Laplace 演算子 ∇_r^2 に、直交座標 (x, y) を極座標 (r, ϕ) に変換すればよい。軸対称の場合は $\phi = 0$ とすればよい。従って、式(2)の Laplace 演算子は次式で表示される極座標における Laplace 演算子となる^{1), 11)}。

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad \dots\dots\dots (10)$$

また、式(7)、(8)を極座標 (r) で表示すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{p_z(r)}{D_v} \quad \dots\dots\dots (11) \\ \nabla_r^4 w_e(r) - \kappa^2 \nabla_r^2 w_e(r) = \frac{p_z(r)}{D_e} \quad \dots\dots (12) \end{array} \right.$$

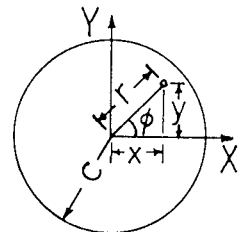


図-3 極座標

となる。式(11)、(12)が不完全合成円板のたわみに関する常微分方程式である。式(12)は面外荷重

$(p_z(r))$ が作用する他に面内荷重(引張力)に相当する $H(=D_0 \cdot \kappa^2)$ が合成断面の中立面に作用する円板の基礎常微分方程式と同形である。

4. 不完全合成円板の座屈に関する微分方程式

前節の荷重は静的な面外荷重である。ここでは合成円板の中立面に作用する面内荷重の圧縮力による座屈について考察する。完全合成円板の横たわみに関する式(11)は単位幅あたりの換算板剛性(D_v)で面外荷重($p_z(x, y)$)が作用する円板の曲げに関する常微分方程式である。同様に、式(12)は単位幅あたりの換算板剛性(D_0)で面外荷重($p_z(x, y)$)が作用する他に引張力に相当する $H(=D_0 \cdot \kappa^2)$ が中立面に作用する円板の常微分方程式である。図-4に示すような合成円板の中立面に作用する面内荷重の圧縮力(p_{ve})による座屈について考察する。式(11), (12)は次のような微分方程式になる。

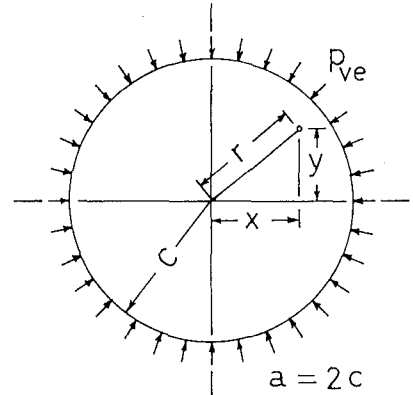


図-4 面内荷重 p_{ve} が作用する全周辺単純支持合成円板

$$\begin{cases} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{1}{D_v} [p_z(r) - p_{ve} \nabla_r^2 w_v(r)] & \dots\dots\dots (13) \\ \nabla_r^4 w_e(r) = \frac{1}{D_0} [p_z(r) - (p_0 - H) \nabla_r^2 w_e(r)] & \dots\dots\dots (14) \end{cases}$$

5. 全周辺単純支持の不完全合成円板の座屈解析無次元量パラメータ $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

円板の境界条件が全周辺単純支持で、横荷重 $p_z(r) = p_z$ (等分布満載荷重) のみによる場合の円板中央点のたわみ $w_{0v}(0)$ は式(13)を解けば、次式のように簡単に求まる^{1), 2)}。

$$w_{0v}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_v} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \dots\dots\dots (15), \quad w_{0e}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_0} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \dots\dots\dots (16)$$

同様に、横荷重 $p_z(r) = p_z$ (等分布満載荷重) のみによる場合の円板中央点のたわみは $w_{0e}(0)$ は式(14)を解けば、次式のように簡単に求まる^{1), 2)}。

次に、これらの解、即ち、式(15), (16)を用いれば、式(13), (14)の解 $w_v(0), w_e(0)$ は次式のように簡単に求まる^{1), 2)}。ここで、 c は円板の半径である。

$$w_v(0) = \frac{w_{0v}(0)}{1 - \frac{p_{ve} \cdot c^2}{4 \cdot 20 D_v}} \dots\dots (17), \quad w_e(0) = \frac{w_{0e}(0)}{1 - \frac{(p_0 - H) \cdot c^2}{4 \cdot 20 D_0}} \dots\dots (18)$$

式(17), (18)において、分母を零とする p_v と p_0 の限界値が座屈荷重である。これらを求めると

$$p_v = \frac{4 \cdot 20 D_v}{c^2} \dots\dots\dots (19), \quad p_0 = \frac{4 \cdot 20 D_0}{c^2} + \kappa^2 \cdot D_0 \dots\dots (20)$$

次のような比をとり、式(9)を代入すれば、直径 $a = 2c$ として

$$\gamma_{11} = \frac{(p_v)_{cr}}{(p_0)_{cr}} = \frac{D_v}{D_0} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \dots\dots\dots (21)$$

ここで、
$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot a^2}{16.80}} = 1 - \alpha_{11} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$(p_v)_{cr}$ あるいは $(p_e)_{cr}$ は単位幅あたりの限界圧縮荷重であり、 D_v あるいは D_e は単位幅の板剛性である。限界荷重は D_v あるいは D_e に比例することは明らかである。

不完全合成円板の限界荷重 $(p_{ve})_{cr}$ は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} + \frac{1}{(p_e)_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \left[1 + \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(21)の γ_{11} を式(23)の $(p_{ve})_{cr}$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_{ve})_{cr}} &= \frac{1}{(p_v)_{cr}} (1 + \gamma_{11}) = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \left(1 + \beta_{11} \cdot \frac{I_{12v}}{I_{12}} \right) \\ &= \frac{1}{(p_v)_{cr}} \frac{(I_{12} + \beta_{11} \cdot I_{12v})}{I_{12}} \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここで、 $I_v = I_{12} + I_{12v}$; $I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{\bar{n}}$; $I_{12v} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n}}$ (25)

式(23)における p_v および p_{ve} の "v" および "ve" はそれぞれ完全合成円板および不完全合成円板を意味している。

以上より、不完全合成円板の座屈解析は同一の無次元量パラメータ α_{11} , β_{11} , γ_{11} を用いて次のようにすればよい。式(22)の β_{11} に D_v/D_e を乗ずれば γ_{11} が求まる。次に、完全合成円板における座屈荷重 $(p_v)_{cr}$ を求めておく。これらの値は完全合成円板の単位幅あたりの換算板剛性 D_v を式(9)で求めておきさえすれば、公式集¹²⁾、設計便覧²⁾ やその他の参考書(例えば文献^{1), 13)}) などを利用すれば簡単に求めることができる。次に、 $(1 + \gamma_{11})$ を計算する。不完全合成円板の座屈荷重 $(p_{ve})_{cr}$ は式(24)より次式で求まる。

$$(p_{ve})_{cr} = (p_v)_{cr} / (1 + \gamma_{11}) \quad \dots\dots\dots (26)$$

なお、本論文と直接関係ないが、次の点に触れておく。

式(17), (18)において、 $p_v = 0$, $p_e = 0$ とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、次のような比を取り、式(9)を代入する。また、 $H = D_e \cdot \kappa^2$ を代入する。

$$\gamma_{11} = \frac{w_e(0)}{w_v(0)} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot a^2}{16.80}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここで
$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot a^2}{16.80}} = 1 - \alpha_{11} \quad \dots\dots\dots (28)$$

不完全合成円板の変形は、 w_v と w_e との代数和で計算される⁹⁾。従って、たわみ w_{ve} は式(27)を代入すれば

$$w_{ve} = w_v + w_e = w_v \cdot (1 + w_e/w_v) = w_v \cdot (1 + \gamma_{11}) \quad \dots\dots\dots (29)$$

で求まる。この γ_{11} が不完全合成円板と考えた場合の増加分であり、完全合成円板を基準にしている。また、 w_v は完全合成円板の換算板剛性 D_v に反比例するのは明らかである。式(27),(28) と式(21),(22)を比較してみれば、同一であることがわかる。このことは不完全合成円板の静的解析と座屈解析が系統的に出来ることを意味している。

6. 全周単純支持の不完全合成円板の座屈特性

合成円板は式(25)で定義される α_{11} の値によって、大きく次の3つに分類される。

- 1) $\beta_{11}=0$, 即ち, $\alpha_{11}=1$, $\gamma_{11}=0$, の場合は完全合成円板。
- 2) $0<\beta_{11}<1$, 即ち, $\alpha_{11}=1-\beta_{11}$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成円板。
- 3) $\beta_{11}=1$, 即ち, $\alpha_{11}=0$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね円板。

次に示す手順で簡単に解析できる。その手順を数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しない。不完全合成円板の一般的な諸元は次のようであるとする(図-1、2、3参照)。

円板の直径 $a=2c=3$ m, $E_1=3.0 \times 10^6$ ton/m², $E_2=2.1 \times 10^7$ ton/m²,
 $I_{12}=1.42859 \times 10^{-6}$ m⁴/m, $I_{12v}=2.49396 \times 10^{-6}$ m⁴/m, $K=8660$ ton/m/m, $h_1=0.05$ m,
 $h_2=0.006$ m, $\bar{n}=7.385$, $\nu=0.3$ (仮定), $\nu_2=0.3$, $\nu_1=0.2$, $s=0.028$ m, $s_1=0.013155$ m,
 $s_2=0.014845$ m, $A_1=0.05$ m²/m, $A_2=0.006$ m²/m, $A_v=0.0127708$ m²/m,
 $I_v=3.92255 \times 10^{-6}$ m⁴/m, $D_v=90.5205$ ton·m²/m。

これらの諸元を用いれば、完全合成円板の場合は式(3)を用いて、 $\kappa=5.69$ /m, $\kappa a=17.07$ と求まり、式(22)を用いて、 $\alpha_{11}=0.9455$, $\beta_{11}=0.0545$, $\gamma_{11}=0.0951$, および $(1+\gamma_{11})=1.0951$ と求まる。完全合成円板の座屈荷重は文献¹⁾より 168.97 ton/m と求まる。従って、不完全合成円板の座屈荷重は $168.97/1.0951=154.30$ ton/m と求まる。

本論文と直接関係ないが、式(27),(28),(29)を用いて、たわみを求めてみる。

完全合成円板の中央点のたわみは $p_z=10$ ton/m/m として文献¹²⁾より 3.5626 cm と求まる。従って、不完全合成円板の中央点のたわみは $3.5626 \times 1.0951=3.9014$ cm と求まる。

以上の数値計算例からもわかるように、電卓と公式集があれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上のたわみおよび座屈荷重を求める場合に非常に便利であり、座屈解析ができることを示している。

7. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 本論文は不完全合成円板(接着剤の弾性変形を考慮した二層板)の座屈解析を行う手法を示したものである。
- (2) 本論文は全周単純支持の円板の座屈解析を行うために $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ なる無次元量を導入し、完全合成円板、不完全合成円板、重ね円板の座屈荷重の相互関係を明らかにした。
 $\beta_{11}=0$, 即ち, $\alpha_{11}=1$, $\gamma_{11}=0$, の場合は完全合成円板である。

$0<\beta_{11}<1$, 即ち, $\alpha_{11}=1-\beta_{11}$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成円板。

$\beta_{11}=1$, 即ち, $\alpha_{11}=0$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね円板。

ここで、 α_{11} は合成円板の合成度を意味し、 $\beta_{11}=1-\alpha_{11}$ を意味し、 γ_{11} は完全合成円板を基準にした場合の増加分を意味している。

- (3) 上述の $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ なる無次元量を用いれば、円板の合成度は次式で示すような簡単な代数式で表示できることが判明した。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\text{定数}}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11}$$

ただし、円板の場合の定数は 16.80 である。長方形板、正方形板、桁などの場合の定数は別の機会に発表する。定数が小さい方が合成度が大きいことがわかる。

- (4) 不完全合成円板の座屈荷重は式(26)で求めることができるので、計算は電卓と公式集¹²⁾あるいは設計便覧²⁾などがあれば十分可能である。

最後に、本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇 名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献

- 1) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970.
- 2) 関谷 壮、浜田 実、角 誠之助編：平板構造強度設計便覧、朝倉書店、1982.
- 3) 佐藤浩一：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、構造工学論文集 Vol.38A, pp.1309-1320, 1992.
- 4) 佐藤浩一：等方性不完全二層板の座屈荷重について、北海道大学工学部研究報告、第158号、pp.13-25, 1992.
- 5) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 6) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A, pp.1245-1258, 1990.
- 7) Koichi SATO : Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991.
- 8) Koichi SATO : Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992.
- 9) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.
- 10) K.S.Pister and S.B.Dong : Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959.
- 11) Rudolph Szilard : Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 12) 構造力学公式集、土木学会編、1986.
- 13) S.P.Timoshenko and J.M.Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.