

I-15

合成桁の曲げ剛性に関する一考察

北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一
(株)釧路製作所 正員 井上 稔康
北海道大学工学部 安念 秀剛

1. まえがき

2種類の構造部材を曲げに対して効果的に使用方法としては、重ね梁、あるいは合成桁として利用する方法がある¹⁾。重ね梁では、単に梁を2段重ねて使ったものであるから、上下の梁の間には、ずれが生じる。即ち、合成度は0%である。これに対して、合成桁はずれ止めや接着剤で結合したものである(この場合には合成度は100%としている)。合成桁橋はRC床版と鋼桁をずれ止め(ジベル)で結合し、両者が一体となって働くようにした橋梁であり、取付けが簡単にでき、溶接変形が少なく、製作上有利な点が多い頭つきスタッドジベルが今日では多く用いられている。通常は合成度100%と考えている。しかしながら、頭つきスタッドジベルはブロックジベルに比べて剛性に乏しいためずれが生じる。ずれを考慮した場合が不完全合成桁(合成度0~100%)であり、現在用いられている合成桁の解析理論は合成度100%の場合であり(特別の場合として非合成の場合は0%である)、合成度が90%の場合どのように計算するのか不明である。従って、本報告の目的は曲げ剛性の減少を考慮した合成度の求め方と合成度を与えればただちに不完全合成桁の解析が出来る修正微分方程式を示すものである。

2. 不完全合成桁のたわみに関する微分方程式

図-1は本報告で用いる合成桁であり、図-2はその断面を示している。

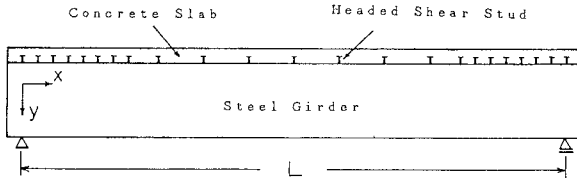


図-1 合成桁

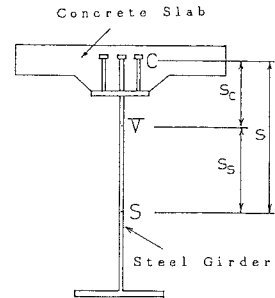


図-2 合成桁の断面

完全合成桁の曲げ解析におけるたわみ w_v に関する微分方程式は次式のとおりである²⁾。

$$\frac{d^4 w_v}{dx^4} = \frac{p}{E_s I_v} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 p は分布活荷重強度、 E_s は鋼桁のヤング係数、 I_v は合成断面の断面二次モーメントである。

$$I_v = I_{cs} + I_{csv} ; I_{cs} = I_s + \frac{I_c}{n} ; I_{csv} = \frac{A_c s_c s}{n} \quad \dots\dots\dots (2)$$

n は鋼とコンクリートのヤング係数比、 I_s は鋼桁の断面二次モーメント、 I_c はコンクリート床版の断面二次モーメント、 A_c はコンクリート床版の断面積、 s_c はコンクリート床版の重心と合成断面の重心間の距離、 s はコンクリート床版と鋼桁との重心間の距離である。

次に、不完全合成桁の曲げ解析におけるたわみ w_v に関する微分方程式は次式のとおりである^{2), 3), 4)}。

$$E_s I_v \frac{d^4 w_{ve}}{dx^4} - \omega^2 E_s I_v \frac{d^2 w_{ve}}{dx^2} = -\omega^2 E_s I_v \frac{d^2 w_v}{dx^2} + \frac{n I_v}{n I_s + I_c} p \quad \dots\dots(3)$$

ここで、

$$\omega^2 = \frac{n I_v}{n I_s + I_c} \frac{K n}{E_s A_c} \frac{s}{s_c} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、K はジベルのばね定数であり、文献⁶⁾の押し抜き試験により求めるものである。

式(3)は合成度が100%でない場合の微分方程式を表しているが、しかしながら、合成度は不明である。

w_{ve} と w_v との差を w_e とすれば、 w_e に関しては式(3)と式(1)との差より²⁾

$$E_s I_v \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \omega^2 E_s I_v \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} p \quad \dots\dots\dots(5)$$

となる。結局、式(3)は次の2個の常微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 w_v}{dx^4} = \frac{p}{E_s I_v} \quad \dots\dots\dots(6) \\ \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \omega^2 \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{p}{E_s I_e} \quad \dots\dots\dots(7) \end{array} \right.$$

ただし、

$$I_e = I_v \frac{n I_s + I_c}{A_c s_c s}, \quad n = \frac{E_s}{E_c} \quad \dots\dots\dots(8)$$

3. 合成度の求め方と合成度を支配する要因について

断面諸元を与え、境界条件を与えて、式(6),(7)を解けばそれぞれのたわみが求まる。剛性マトリックスによる解法もその一つである^{3),4)}。不完全合成桁のたわみは次式で求まる²⁾。

$$w_{ve} = w_v + w_e = w_v \cdot \left(1 + \frac{w_e}{w_v}\right) = w_v \cdot (1 + \gamma) \quad \dots\dots\dots(9)$$

また、

$$\gamma = \frac{w_e}{w_v} = \frac{I_v}{I_e} \cdot \beta = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} \cdot \beta = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} \cdot (1 - \alpha) \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 L^2}{\pi^2}} = 1 - \alpha; \quad \alpha = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\omega^2 L^2}} = 1 - \beta \quad \dots\dots\dots(11)$$

とおけば、 α が合成度を表している。

次に、合成度の求め方を示す。まず、最初に β を求め、 $1 - \beta$ を計算して α を求める。また、 β の求め方には次のような二通り方法がある。

第一の方法は式(6)を初等梁理論を用いて閉じ形で解を求め、式(7)を吊橋の線形化撓度理論を用いて閉じた形で解を求めて、式(10)の γ を求めてから β を求める。この方法を用いた場合は式(11)の形では求まらない。この方法で求めた α は文献^{3),4)}に示してある。

単純支持で集中荷重の場合の式(6)の解は次式のようなものである。数学的にはGreen関数である。

$$w_v(x, \xi) = \frac{L^3}{6 E I_v} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)^2\right] \right. \\ \left. + \left(\frac{x}{L} + \frac{\xi}{L}\right)^3 E(x - \xi) \right\} \quad \dots\dots\dots(12)$$

単純支持で集中荷重の場合の式(7)の解は次式のようなものである。数学的にはGreen関数である。

$$w_0(x, \xi) = \frac{L}{H} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \frac{x}{L} - \frac{\sinh \omega(L - \xi) \cdot \sinh \omega x}{\omega L \cdot \sinh \omega L} \right. \\ \left. + \left[\frac{\sinh \omega(x - \xi)}{\omega L} - \left(\frac{x}{L} - \frac{\xi}{L}\right) \right] E(x - \xi) \right\} \dots\dots\dots(13)$$

第二の方法は式(6), (7)をフーリエ級数に展開して、解を求める。

単純支持で集中荷重の場合、式(6)をフーリエ級数で求めれば、

$$w_v(x, \xi) = 2P/L \sum_{m=1}^{\infty} / (E_s I_v \cdot (m\pi/L)^4) \cdot \sin(m\pi \xi/L) \cdot \sin(m\pi x/L) \dots(14)$$

単純支持で集中荷重の場合、式(7)をフーリエ級数で求めれば、

$$w_0(x, \xi) = 2P/L \sum_{m=1}^{\infty} / (E_s I_0 \cdot (m\pi/L)^4 + \omega^2 \cdot E_s I_0 \cdot (m\pi/L)^2) \\ \cdot \sin(m\pi \xi/L) \cdot \sin(m\pi x/L) \dots(15)$$

式(14), (15)において、 $m=1$ のみとして、 β を求めれば、式(11)となる。

また、単純支持で等分布満載荷重の場合、式(6)をフーリエ級数で求めれば、

$$w_v(x) = 4P \sum_{m=1}^{\infty} / (E_s I_v \cdot (m\pi/L)^4 \cdot m\pi) \cdot \sin(m\pi x/L) \dots\dots\dots(16)$$

ただし、 m は奇数

単純支持で等分布満載荷重の場合、式(7)をフーリエ級数で求めれば、

$$w_0(x) = 4P \sum_{m=1}^{\infty} / ((E_s I_0 \cdot (m\pi/L)^4 + \omega^2 \cdot E_s I_0 \cdot (m\pi/L)^2) \cdot m\pi) \cdot \sin(m\pi x/L) \dots(17)$$

ただし、 m は奇数

式(16), (17)において、 $m=1$ のみとして、 β を求めれば、式(11)となる。式(14), 式(15)あるいは式(16), (17)において、次の二点を強調しておきたい。まず、第一点は m を無限項(実際の計算では有限項)とった場合の和の比と $m=1$ のみの場合の比とほとんど同じである。従って、第二点は $m=1$ のみとして、 β を求めれば、集中荷重の場合も等分布満載荷重の場合も β が同じになることである。

合成度を支配する要因は式(11)と式(4)より、 ω と $a=L$ である。即ち、ジベルのばね定数 K 、コンクリートと鋼のヤング係数 E_c と E_s 、そのヤング係数比 n 、合成断面の断面二次モーメント I_v 、コンクリート床版と鋼桁の各重心に関する断面二次モーメント I_c と I_s 、コンクリートの床版の断面積 A_c 、コンクリート床版と鋼桁との重心間の距離 s 、コンクリート床版の重心と合成断面の重心間の距離 s_c 、スパン $a=L$ である。

4. 不完全合成桁のたわみに関する修正微分方程式

式(9)で求まる不完全合成桁のたわみ w_v は完全合成桁のたわみ w_v の $(1+\gamma)$ 倍である。 w_v は曲げ剛性に逆比例するから、 w_v は w_v の曲げ剛性を $(1+\gamma)$ で除したことになる。即ち、曲げ剛性の減少を示唆している。換言すれば、式(3)は式(1)と同形の次式に示すような微分方程式と考える。ここでは、式(18)を修正微分方程式とする。

$$\frac{d^4 w_{ve}}{dx^4} = \frac{P}{E_s I_{vv}} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 $E_s I_{vv} = E_s I_v / (1+\gamma) = E_s \frac{(I_{cs} + I_{csv}) \cdot (I_{cs})}{I_{cs} + (1-\alpha) \cdot I_{csv}} \dots\dots\dots(19)$

ここで、 $E_s I_{vv}$ は不完全合成桁の場合の換算曲げ剛性であり、 $E_s I_v$ は完全合成桁の場合の曲げ剛性

である。合成度90%とした場合の計算法は式(19)の α を0.9として I_{vv} を求めさえすればよい。

5. 数値計算例

図-1, 2において、単純支持の不完全合成桁に集中荷重が作用した場合と等分布満載荷重が作用し

た場合の合成度を用いた計算法を以下に示す。まず、断面諸元を与え、文献⁵⁾によりジベルのばね定数 K を求め、式(4)で ω を求め、式(11)で β を求め、式(19)で換算曲げ剛性 $E_s I_{vv}$ を求めて、式(18)を解析すればよい。図-3は縦軸は合成度 $\alpha (=1-\beta)$ であり、横軸に ωa (無次元量) をとり、図示したものである。

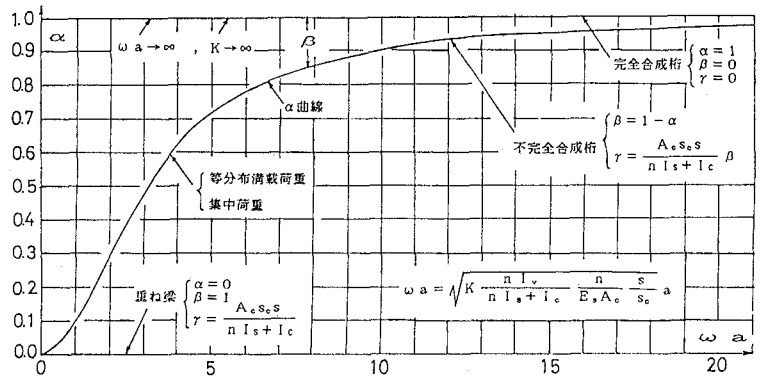


図-3 不完全合成桁の α 曲線

次に、図-3の使い方と計

算例を示す。図-1において、 $L=a=2m$, $\omega=5/m$, とすれば、 $\omega a=10$ となり、図-3 より $\alpha=0.90$ ($\beta=0.10$) と読み取れる。また、式(11)より β を計算すれば、 $\beta=0.0987$ と求まる。図からは2桁程度しか読み取ることができないが、図からの値と計算値はほぼ一致していることがわかる。図-3よりわかることは、二種類の荷重状態に関係なく、 α 曲線は一致している。

6. あとがき 本研究で得られた結論は次の通りである。

- 1) 不完全合成桁の曲げ解析におけるたわみに関する微分方程式(式(3))の解は式(9)で求まる。これは完全合成桁の曲げ解析におけるたわみに関する微分方程式(式(1))の曲げ剛性を $(1+\gamma)$ で除したことになる。即ち、曲げ剛性の減少を示している。従って、式(3)を式(18)のように修正した微分方程式となる。
- 2) 不完全合成桁の場合、ばね定数 K (文献⁵⁾ で求める) と断面諸元を与えて式(11)の β を求めれば、簡単に合成桁の合成度を求めることができる。また、完全合成桁、不完全合成桁および重ね梁のたわみは式(18)で簡単に求めることができる。計算はパソコンで十分である。
- 3) 図-3の α 曲線は文献^{3), 4)} の α 曲線とほとんど重なる。このことは不完全合成桁の場合の静的たわみをフーリエ級数展開して、有限項のうち、第一項のみ考えて、その比をとった場合であり、無限項(実際の計算では有限項)の和の比とほとんど同じになること示している。

最後、本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇 名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対して心より感謝の意を表します。

- (参考文献) 1) 橋 善雄 著、中井 博改訂：橋梁工学 第3版、共立出版株式会社、1991. 2) 島田 静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973. 3) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集、Vol.36A, pp.1223-1236, 1990.3. 4) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989. 5) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M. : Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.