

I-8

部分的端面圧力を受ける横等方性短円柱の非軸対称応力

北見工業大学 正員 奥村 勇

北海道開発コンサルタント 正員 長井智典

1. 緒言

最近の3次元弾性問題に関する研究は、異方性体のそれに向うようになった。異方性体には、種々の部類があるが、実用的見地から、直交異方性体と横等方性体とが主に取扱われている。直交異方性体については Sonoda および Horikawa¹⁾ の長方形厚板の曲げ解析が見受けられるが、3次元固体の応力解析は、現在でもあまり見当たらないようである。一方、横等方性体については、古くに、Elliott²⁾ と Lodge³⁾ が3次元弾性解を見出し、著者らの一人が、Elliottの解を補正した一般化されたElliottの解^{4), 5)} を提案したため、短直方柱⁶⁾、短円柱⁴⁾ 或は短円筒⁷⁾ などの軸対称問題が幅広く研究されている。

然しながら、短円柱或は短円筒の非軸対称問題に関する研究は、解析が複雑になるためか、或は、これまでの3次元弾性解が、一般的な境界値問題に対して不十分であるためか、どちらであるかは明確でないが、現時点でも、殆ど見当たらないようである。

本研究は、著者らの一人の提案による一般化されたElliottの解⁴⁾ を用いて、両端面に部分的圧力を受ける横等方性短円柱の非軸対称応力を解析するものである。端面の部分的圧力として、2つの扇形分布荷重を考え、側面が自由の短円柱を取扱う。数値計算においては、横等方性材料の一例として、マグネシウム結晶およびカドミウム結晶を取扱い、横等方性短円柱の非軸対称応力特性を明らかにする。また、厳密な等方性材料の変位および応力の値との比較を行い、変位および応力に及ぼす異方性の効果を調べる。

2. 一般化されたElliottの解

円柱座標 (r, θ, z) における一般化されたElliottの解は、変位成分を u_r, u_θ および u_z 、弾性定数を c_{ij} と表すと、次のように表される。

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + r_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - r_2 \phi_1 - r_3 \phi_3 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + r_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - r_2 \phi_1 - r_3 \phi_3 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial r}; \\ u_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (\phi_{01} - r_3 \phi_1) + k_2 (\phi_{03} - r_2 \phi_3) + r_1 \left(k_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + k_2 z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 \phi_{01} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} &= 0; \quad \nabla_1^2 \phi_{03} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_{03}}{\partial z^2} = 0; \quad \nabla_1^2 \phi_1 + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0; \quad \nabla_1^2 \phi_3 + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0; \quad \nabla_1^2 \psi + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \\ \nabla_1^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$r_1 = \begin{cases} 1 & [\nu_1 = \nu_2] \\ 0 & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}; \quad r_2 = \begin{cases} -\frac{2c_{11}\nu_2}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \frac{c_{11}\nu_1 - c_{44}}{c_{11}\nu_2 - c_{44}} & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}; \quad r_3 = \begin{cases} 0 & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases} \dots\dots\dots (3)$$

また、 k_1 および k_2 は、次式に示すパラメータ、 ν_3 は、次式に示す弾性定数の比である。

Axially Asymmetric Stresses in a Transversely Isotropic, Short Cylinder

Subjected to Partial Pressures on the End Faces By I.A. OKUMURA and T. NAGAI

$$k_1 = \frac{C_{11}\nu_1 - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}; \quad k_2 = \frac{C_{11}\nu_2 - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}; \quad \nu_3 = \frac{C_{44}}{C_{66}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} \quad (4)$$

さらに、 ν_1 および ν_2 は、次式に示す 2 次方程式の 2 つの根である。

$$C_{11}C_{44}\nu^2 + [C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) - C_{11}C_{33}]\nu + C_{33}C_{44} = 0 \quad (5)$$

図-1 に示すように、短円柱の応力場が、 z に関して偶の問題を考える
と、変位ポテンシャルは、式 (2) から、次のように求められる。

$$\phi_{03} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}};$$

$$\phi_{01} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n r);$$

$$\phi_3 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} C_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}};$$

$$\phi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n r);$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_{ms} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms}r) \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \sin m\theta \cos \beta_n z \\ \times I_m(\sqrt{\nu_3} \beta_n r) \quad (6)$$

ここで、

$$\alpha_{ms} = \frac{\lambda_{ms}}{a} (m=0, 1, \dots, s=1, 2, \dots); \quad \beta_n = \frac{n\pi}{h} (n=1, 2, \dots) \quad (7)$$

また、 $A_{ms}, \dots, E_{mn}$ は、境界条件から定められる未定定数である。式

(6) の基本解のみでは、後述する境界条件を満足できないので、次の 2 種類の付加解が必要になる。

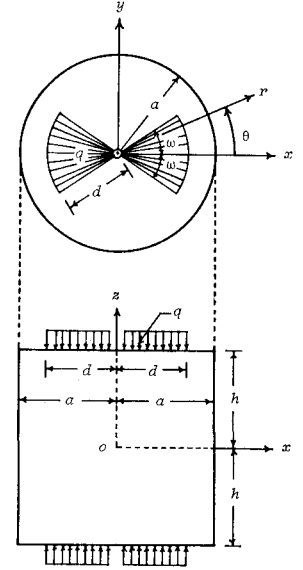


Fig.1 Coordinate system of short cylinder.

$$\phi_{01,0} = \sum_{m=2}^{\infty} D_{m0} \cos m\theta r^m - \frac{\nu_1 \gamma_4}{\nu_3(\gamma_2 - \gamma_3)} \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_1 m - \gamma_3) F_{m0} \cos m\theta \left(\frac{r^{m+2}}{2} - \frac{m+1}{\nu_1} r^m z^2 \right);$$

$$\phi_{1,0} = \frac{\nu_2 \gamma_4}{\nu_3(\gamma_2 - \gamma_3)} \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0} \cos m\theta \left(\frac{r^{m+2}}{2} - \frac{m+1}{\nu_2} r^m z^2 \right);$$

$$\psi_0 = \gamma_4 \sum_{m=1}^{\infty} F_{m0} \sin m\theta \left(\frac{r^{m+2}}{2} - \frac{m+1}{\nu_3} r^m z^2 \right); \quad \gamma_4 = \frac{4C_{11}}{C_{11} + C_{12}} \quad (8)$$

$$\phi_{1,00} = F_{00} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_2} \right); \quad \phi_{3,00} = C_{00} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{z^2}{\nu_1} \right) \quad (9)$$

3. 応力成分の表現

応力成分を $\sigma_{rr}, \dots, \sigma_{\theta z}$ と表す。式 (6), (8) および式 (9) の変位ポテンシャルを式 (1) に代入して得た変位成分よりひずみ成分を求めて、横等方性体の一般化された Hooke の法則を用いると、応力成分の表現が得られる。一例として、 $\sigma_{\theta z}$ および σ_{zr} について示せば、次の通りである。

$$\sigma_{\theta z}^{(1)} = -C_{44} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ms}^2}{2\sqrt{\nu_2}} \sin m\theta \left\{ J_{m-1}(\alpha_{ms}r) \left[(1+k_2) A_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3}} B_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + C_{ms} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_2) \right. \right. \\ \times \left. \left\{ \gamma_1 \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + \left(\gamma_1 - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1+k_2} \right) \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} \right] + J_{m+1}(\alpha_{ms}r) \left[(1+k_2) A_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3}} B_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + C_{ms} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_2) \left\{ \gamma_1 \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + \left(\gamma_1 - \frac{k_2 \gamma_2 + \gamma_3}{1+k_2} \right) \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} \right] \right\};$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zr}^{(1)} = & C_{44} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ms}^2}{2\sqrt{\nu_2}} \cos m\theta \left\{ J_{m-1}(\alpha_{ms}r) \left[(1+k_2) A_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3}} B_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + C_{ms} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_2) \right. \right. \\ & \times \left. \left\{ \gamma_1 \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + \left(\gamma_1 - \frac{k_2\gamma_2 + \gamma_3}{1+k_2} \right) \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} \right] - J_{m+1}(\alpha_{ms}r) \left[(1+k_2) A_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_2}} \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_3}} B_{ms} \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_3}} + C_{ms} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_2) \left\{ \gamma_1 \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \cosh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} + \left(\gamma_1 - \frac{k_2\gamma_2 + \gamma_3}{1+k_2} \right) \sinh \frac{\alpha_{ms}z}{\sqrt{\nu_1}} \right\} \right] \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(2)} = & C_{44} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu_1} \beta_n^2}{2} \sin m\theta \sin \beta_n z \left\{ D_{mn}(1+k_1) [I_{m-1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n r) - I_{m+1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n r)] + F_{mn} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_1) \right. \\ & \times \left[\left(\gamma_1 m - \frac{k_1\gamma_3 + \gamma_2}{1+k_1} \right) I_{m-1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n r) + \left(\gamma_1 m + \frac{k_1\gamma_3 + \gamma_2}{1+k_1} \right) I_{m+1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n r) \right] + E_{mn} \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1}} \\ & \times [I_{m-1}(\sqrt{\nu_3} \beta_n r) + I_{m+1}(\sqrt{\nu_3} \beta_n r)] \left. \right\}; \\ \sigma_{zr}^{(2)} = & -C_{44} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu_1} \beta_n^2}{2} \cos m\theta \sin \beta_n z \left\{ D_{mn}(1+k_1) [I_{m-1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n r) + I_{m+1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n r)] + F_{mn} \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} (1+k_1) \right. \\ & \times \left[\left(\gamma_1 m - \frac{k_1\gamma_3 + \gamma_2}{1+k_1} \right) I_{m-1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n r) - \left(\gamma_1 m + \frac{k_1\gamma_3 + \gamma_2}{1+k_1} \right) I_{m+1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n r) + 2\gamma_1 \sqrt{\nu_2} \beta_n r I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n r) \right] \\ & \left. + E_{mn} \sqrt{\frac{\nu_3}{\nu_1}} [I_{m-1}(\sqrt{\nu_3} \beta_n r) - I_{m+1}(\sqrt{\nu_3} \beta_n r)] \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta z}^{(0,1)} = \sigma_{zr}^{(0,1)} = \sigma_{\theta z}^{(0,0)} = \sigma_{zr}^{(0,0)} = 0 \quad (12)$$

求める応力成分は、3種類の肩添字を付したそれぞれの応力成分を加えたものであり、次式で表される。

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{rr}^{(0,1)} + \sigma_{rr}^{(0,0)}; \dots; \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^{(1)} + \sigma_{r\theta}^{(2)} + \sigma_{r\theta}^{(0,1)} + \sigma_{r\theta}^{(0,0)} \quad (13)$$

4. 境界条件および未定定数の関係式

図-1に示したように、短円柱の両端面に扇形の部分圧力が作用し、側面が自由の場合を考えると、境界条件は、次式となる。

$$z = \pm h \text{ において、 } \sigma_{zr} = 0; \sigma_{z\theta} = 0; \sigma_{zz} = -p(r, \theta) \quad (14)$$

$$r = a \text{ において、 } \sigma_{rr} = 0; \sigma_{r\theta} = 0; \sigma_{r\alpha} = 0 \quad (15)$$

ここで、

$$p(r, \theta) = \begin{cases} q [0 \leq \theta < \omega, \pi - \omega < \theta < \pi + \omega, 2\pi - \omega < \theta \leq 2\pi \text{ かつ } 0 < r < d] \\ 0 \text{ [上記以外の場合]} \end{cases} \quad (16)$$

式(7)の第2式から、 $z = \pm h$ における $\sigma_{\theta z}^{(2)}$ および $\sigma_{zr}^{(2)}$ が0となるので、境界条件(14)の第1式および第2式を式(10)の $\sigma_{zr}^{(1)}$ および $\sigma_{\theta z}^{(1)}$ に課すると、未定定数の関係が、次のように求められる。

$$B_{ms} = 0; A_{ms} = f_{ms} \frac{\sinh(\alpha_{ms}h/\sqrt{\nu_1})}{\sinh(\alpha_{ms}h/\sqrt{\nu_2})} C_{ms} \quad (17)$$

ここで、

$$f_{ms} = -\sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \left[\gamma_1 \left(1 + \frac{\alpha_{ms}h}{\sqrt{\nu_1}} \coth \frac{\alpha_{ms}h}{\sqrt{\nu_1}} \right) - \frac{k_2\gamma_2 + \gamma_3}{1+k_2} \right] \quad (18)$$

式(17)を式(10)の第2式に代入し、 λ_{ms} を、 $J'_m(\lambda_{ms}) = 0$ の第 m, s 番目の正根として取ると、 $r = a$ における $\sigma_{rr}^{(1)}$ が0となるので、境界条件(15)の第3式を式(11)の $\sigma_{zr}^{(2)}$ に課すると、未定定数の関係が、次のように求められる。

$$D_{mn} = g_{mn}^{(1)} \frac{I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)} F_{mn} + g_{mn}^{(2)} \frac{I_m(\sqrt{\nu_3} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)} E_{mn} \quad (19)$$

ここで、

$$g_{mn}^{(1)} = -\frac{1}{\Delta} \left\{ r_1 [m^2 + (\sqrt{\nu_2} \beta_n a)^2] - \frac{k_1 r_3 + r_2}{1 + k_1} \left[m + \sqrt{\nu_2} \beta_n a \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)} \right] \right\};$$

$$g_{mn}^{(2)} = -\frac{m}{\Delta(1+k_1)}; \quad \Delta = m + \sqrt{\nu_1} \beta_n a \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)} \quad (20)$$

式(17)および式(19)により、境界条件(14)および(15)の、それぞれ、第1、第2および第3式が厳密に満足されたことになる。境界条件(14)の第3式を満足するためには、式(16)を Fourier-Bessel の級数に展開して置く必要がある。すなわち、

$$p(r, \theta) = e_{00} + \sum_{s=1}^{\infty} e_{0s} J_0(\alpha_{0s} r) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} e_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \quad (21)$$

ここで、

$$e_{00} = \frac{2q\omega}{\pi} \left(\frac{d}{a} \right)^2; \quad e_{0s} = \frac{4q\omega}{\pi} \frac{d}{a} \frac{J_1(\lambda_{0s} d/a)}{\lambda_{0s} J_0'(\lambda_{0s})};$$

$$e_{ms} = \frac{4q}{\pi} \frac{[1 + (-1)^m] \sin m\omega}{m(\lambda_{ms}^2 - m^2) J_m^2(\lambda_{ms})} \left[\lambda_{ms} \frac{d}{a} J_{m+1} \left(\lambda_{ms} \frac{d}{a} \right) + 2m \sum_{k=0}^{\infty} J_{m+2+2k} \left(\lambda_{ms} \frac{d}{a} \right) \right] \quad (22)$$

式(17)および式(19)を用いて、未定定数 A_{ms} および D_{mn} を消去した σ_{rr} 、 $\sigma_{r\theta}$ および σ_{zz} に境界条件(15)および(14)の、それぞれ、第1、第2および第3式を課すると、未定定数 C_{ms} 、 F_{mn} 、 E_{mn} 、 D_{m0} 、 F_{m0} 、 F_{00} および C_{00} を定めるための3群の無限連立1次方程式と2組の2元連立1次方程式とが得られる。例えば、式(15)の第1式から、次の3式が得られる。

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_{ms}}{a^2} \sinh \frac{\alpha_{ms} h}{\sqrt{\nu_1}} s t_{mn}^{(1)} J_m(\lambda_{ms}) + \beta_n^2 F_{mn} I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n a) \left\{ g_{mn}^{(1)} \nu_1 \left[(C_{11} - C_{12}) \frac{m(m-1)}{(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)^2} + C_{11} - C_{13} \frac{k_1}{\nu_1} \frac{C_{11} - C_{12}}{\sqrt{\nu_1} \beta_n a} \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)} \right] \right.$$

$$+ \nu_2 \left[(C_{11} - C_{12}) \frac{r_1 m - r_2}{(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)^2} + r_1 \left\{ C_{11}(m+1) + C_{12} - C_{13} \frac{k_1}{\nu_2} m \right\} - C_{11} r_2 + C_{13} \frac{k_1 r_3}{\nu_2} + \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n a)} \right.$$

$$\times \left\{ (C_{11} - C_{12}) \frac{r_1 m^2 + r_2}{\sqrt{\nu_2} \beta_n a} + r_1 \left(C_{11} - C_{13} \frac{k_1}{\nu_2} \right) \sqrt{\nu_2} \beta_n a \right\} \left. \right\} + \beta_n^2 E_{mn} I_m(\sqrt{\nu_3} \beta_n a) \left\{ g_{mn}^{(2)} \nu_1 \left[(C_{11} - C_{12}) \frac{m(m-1)}{(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)^2} \right. \right.$$

$$+ C_{11} - C_{13} \frac{k_1}{\nu_1} \frac{C_{11} - C_{12}}{\sqrt{\nu_1} \beta_n a} \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n a)} \left. \right] + \nu_3 (C_{11} - C_{12}) \frac{m}{\sqrt{\nu_3} \beta_n a} \left[\frac{m-1}{\sqrt{\nu_3} \beta_n a} + \frac{I_{m+1}(\sqrt{\nu_3} \beta_n a)}{I_m(\sqrt{\nu_3} \beta_n a)} \right] \left. \right\} = 0 \quad (23a)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{C_{ms}}{a^2} \sinh \frac{\alpha_{ms} h}{\sqrt{\nu_1}} J_m(\lambda_{ms}) s t_{m0}^{(1)} + D_{m0} (C_{11} - C_{12}) m(m-1) a^{m-2} + F_{m0} a^m (m+1) [m(C_{11} - C_{12})$$

$$+ (C_{11} + C_{12})(2 - r_4)] = 0, \quad (m \geq 1) \quad (23b)$$

$$F_{00} \left[(C_{11} + C_{12})(2r_1 - r_2) + \frac{2k_1}{\nu_2} C_{13} r_3 \right] - C_{00} \left[r_3 (C_{11} + C_{12}) + \frac{2k_2}{\nu_1} C_{13} (2r_1 - r_2) \right] = 0 \quad (23c)$$

ここで、 $s t_{mn}^{(1)}$ および $s t_{m0}^{(1)}$ は、既知定数である。

5. 計算結果

数値計算は、マグネシウム結晶、カドミウム結晶およびポアソン比 $\nu = 0.25$ の厳密な等方性材料で作られた、 $h/a = 1.0$ 、 $d/a = 0.3$ および $\omega = \pi/8$ を持つ短円柱について行った。級数の項数は、 m について、偶数のみ22項、 s および n について、36項を用いた。マグネシウム結晶およびカドミウム結晶の弾性定数の値は、Huntington⁸⁾が求めた値を用いた。図-2から図-5に、マグネシウム結晶の垂直応力 σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 、 σ_{zz} およびせん断応力 σ_{zr} の $\theta = 0$ における分布を示した。図-2から、端面($z = a$)における σ_{rr} の値は、比較的大きいが、内部では、小さな値となり、 z 方向および r 方向における減衰が早いことが分る。これは、端面の部分的圧力の分布面積が小さいことに起因していると考えられる。図-3から、端面における $\sigma_{\theta\theta}$ の値が、複雑な変化を示していることが分る。図-2および図-3の端面における σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の値

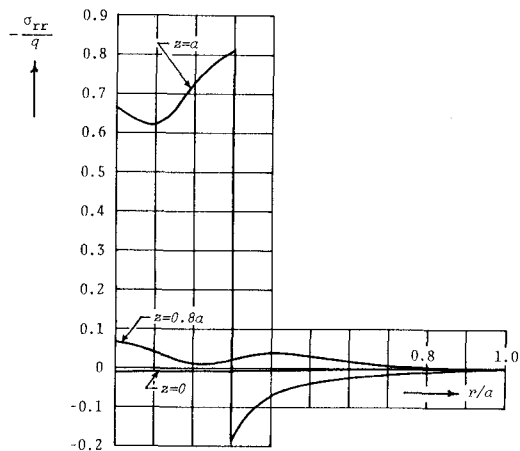


Fig.2 Distribution of σ_{rr}
(Magnesium, $\theta=0$).

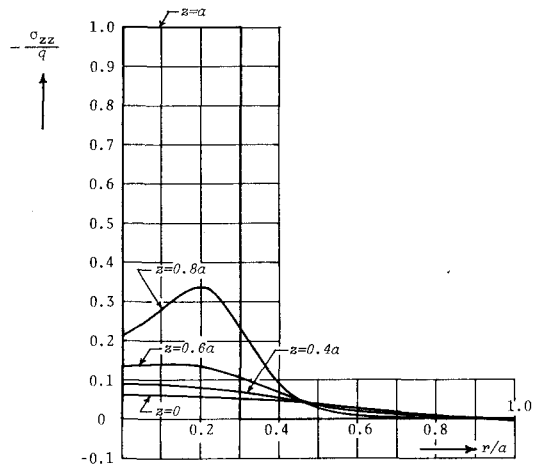


Fig.4 Distribution of σ_{zz}
(Magnesium, $\theta=0$).

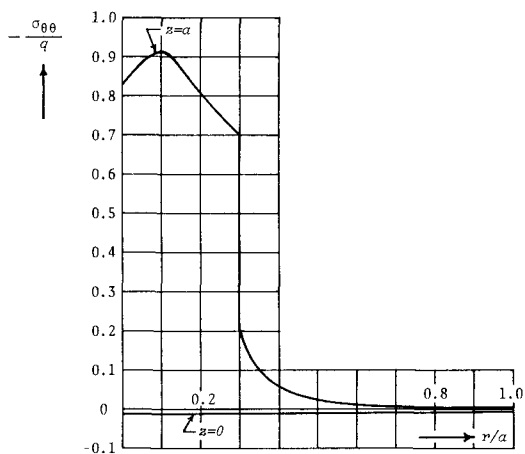


Fig.3 Distribution of $\sigma_{\theta\theta}$
(Magnesium, $\theta=0$).

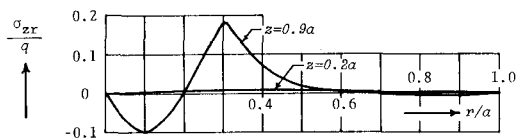


Fig.5 Distribution of σ_{zr}
(Magnesium, $\theta=0$).

Table 1 Comparison of displacement
values
($r=0.2\alpha$, $\theta=\pi/16$, $z=0.8\alpha$).

Material	$u_r/\frac{qa}{\sigma_{11}}$	$u_\theta/\frac{qa}{\sigma_{11}}$	$u_z/\frac{qa}{\sigma_{11}}$
Magnesium	0.0048	0.0039	-0.1061
Cadmium	0.0164	0.0063	-0.2428
Isotropy	0.0042	0.0036	-0.0980

Table 2 Comparison of stress values
($r=0.1\alpha$, $\theta=0$, $z=0.8\alpha$).

Material	σ_{rr}/q	$\sigma_{\theta\theta}/q$	σ_{zz}/q	σ_{zr}/q
Magnesium	-0.0413	0.0166	-0.2749	-0.0330
Cadmium	-0.1030	0.0071	-0.2176	-0.0168
Isotropy	-0.0470	0.0170	-0.2603	-0.0311

は、斎藤⁹⁾の方法により、特別に計算したものである。特に、 $r/a=0$ における値は、 $r=0$ が特異点であるために、 $r/a=0+\varepsilon$ における値である。図-4から、 σ_{zz} の値の r 方向における減衰が早いことが分る。図-5から、 σ_{zr} の値は、端面近くでは、部分的圧力の分布境界($r/a=0.3$)で最大値を示し、 r/a が大きくなるにつれて、急速に減衰することが分る。また、垂直応力の値に比較して、相当に小さな値となっている。表1に、変位値の等方性材料との比較を示した。等方性材料に比較して、カドミウム結晶の値が大きく相異し、 u_r 、 u_θ および u_z の値が、それぞれ、290.5%、75%および147.8%異なっている。また、変位値の中でも、 u_r の値が、マグネシウム結晶およびカドミウム結晶において、相異が大きくなっている。表2に、応力値の等方性材料との比較を示した。変位値と同様に、カドミウム結晶の値が大きく相異し、 σ_{rr} 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 、 σ_{zz} および σ_{zr} の値が、それぞ

れ、119.1% , 58.2% , 16.4% および 46.0% 異なっている。また、応力値の中でも、 σ_{rr} の値が、マグネシウム結晶およびカドミウム結晶において、相異が大きくなっている。

6. 結 論

一般化されたElliottの解を用いて、両端面に扇形の部分圧力を受ける横等方性短円柱の非軸対称応力を解析した。解析結果から、次の結論が導き出される。

(1) 一般化されたElliottの解を用いれば、等方性短円柱の解析方法と殆ど同じ解析方法で、横等方性短円柱の非軸対称応力が解析できる。

(2) 横等方性短円柱の一般的な非軸対称問題では、境界条件を満たすために、2種類の付加解が必要になり、本論文で示した付加解は、他の非軸対称問題にも広く応用できる。

(3) 端面の部分的圧力の分布面積が小さい場合には、 σ_{rr} および $\sigma_{\theta\theta}$ の値の z 方向および r 方向における減衰が、極めて急速である。

(4) カドミウム結晶の変位および応力の値は、等方性材料のそれらに比較して、マグネシウム結晶の値の相異より、より大きな相異を示す。

(5) マグネシウム結晶およびカドミウム結晶の変位 u_r の値は、等方性材料のそれと比較して、他の変位値より、より大きな相異を示す。

(6) マグネシウム結晶およびカドミウム結晶の応力 σ_{rr} の値は、等方性材料のそれと比較して、他の応力値より、より大きな相異を示す。

(7) 横等方性材料が同じでも、着目量の違いにより、異方性の効果が変動する。

(8) 本論文で述べた横等方性短円柱の解析方法は、他の非軸対称問題、例えば、短円柱の側面に部分的圧力を受ける場合にもそのまま応用でき、一般化されたElliottの解の有用性を物語っている。

参考文献

- 1) Sonoda, K. and Horikawa, T.: Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems, Theor. Appl. Mech., Vol. 29, pp. 117-126, 1981.
- 2) Elliott, H. A.: Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 44, pp. 522-533, 1948.
- 3) Lodge, A. S.: The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 8, pp. 211-225, 1955.
- 4) Okumura, I. A.: Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic solids and its application, Struct. Eng./Earthquake Eng., Vol. 4, No. 2, pp. 401s-411s, 1987.
- 5) Okumura, I. A. and Dohba, H.: Generalization of Elliott's solution to transversely isotropic elasticity problems in Cartesian coordinates, JSME Int. J., Ser. I, Vol. 32, No. 3, pp. 331-336, 1989.
- 6) 奥村 勇・道端久紀: 部分荷重を受ける横等方性短直方柱の三次元応力解析, 日本機械学会論文集A編, 第55巻第516号, pp. 1771-1779, 1989.
- 7) Okumura, I. A.: Stresses in a transversely isotropic, short hollow cylinder subjected to an outer band load, Ing.-Arch., Vol. 59, No. 4, pp. 310-324, 1989.
- 8) Huntington, H. B.: The elastic constants of crystals, In: Seitz, F. and Turnbull, D. (eds.) Solid state physics, Vol. 7, p. 213, Academic Press, 1957.
- 9) 斎藤秀雄: 短円柱および円盤の軸対称変形, 日本機械学会論文集, 第18巻第68号, pp. 21-28, 1952.