

I-4

塑性域の広がり を考慮した
格子桁の弾塑性解析

北海道大学工学部 正 員 平沢 秀之
北海道大学工学部 正 員 佐藤 浩一

1. はじめに

材料の非線形性を考慮した骨組構造物の解析法として代表的なものに塑性ヒンジ法がある。この方法は、剛性マトリックス法と組み合わせることにより、終局崩壊荷重を電子計算機により数値的に求めることができ、さらに崩壊に至るまでの荷重、変位、断面力の過程を追跡することができるため、非常に有効で実用的な方法である。過去には、この理論を適用して解析した例が、渡辺ら¹⁾、今井ら²⁾、の論文等に見られる。しかし、塑性ヒンジ法は、(1)部材のある断面が降伏に達するまでは、弾性の範囲である。(2)部材のある断面が、一旦降伏に達したならば、その断面は完全に塑性状態である。(3)部材端に塑性ヒンジを生じた場合、ヒンジとヒンジの間の部材は弾性である。という仮定に基づいているため、降伏に達した断面が、突然完全な弾性体から、塑性体に変化するので、その荷重-変位曲線はなめらかではない。また、非線形な状態における、構造物の剛性や強度を過大に評価してしまう欠点がある。

そこで本報告では、これらの欠点を改良するために、剛性マトリックスを修正することにより、部材断面の初期降伏から全塑性へ移行する過程を考慮し、解析を行った。断面の弾塑性の状態を考慮した手法としては、有限要素法によるものや、エネルギー原理から実用式を誘導した方法³⁾などがあるが、部材数の多い構造物に適用するには、難点がある。本報告で用いた、剛性マトリックスを修正する解析手法は、従来の塑性ヒンジ法の簡単な改良に基づいたもので、部材断面における塑性化の程度を表す係数 α を導入し、弾塑性状態を考慮したものである。

2. 曲げとねじりを受けるはり

解析に先立ち、以下のような仮定を設ける。

(1)材料の応力-ひずみ曲線は図-1のような完全弾塑性体とみなし、ひずみ硬化は無視する。

(2)材料の降伏せん断応力度 τ_y は、Von Misesの降伏条件に従い、

$$\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots (1)$$

とする。

(3)平面保持の法則に従い、微小変形を取り扱う。

(4)降伏条件式には、曲げモーメント、ねじりモーメントを用い、せん断力の影響を無視する。

いま、円形断面を持つはり部材に曲げモーメント M を増加させていくとき、はりの断面内に生ずる応力分布を、弾性状態から全塑性状態に至る過程を示すと、図-2のようになる。同様に、ねじりモーメント T を増加させ

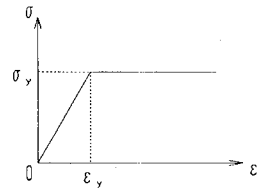


図-1 応力-ひずみ曲線

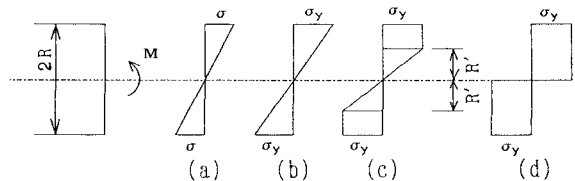


図-2 曲げによる応力の降伏過程

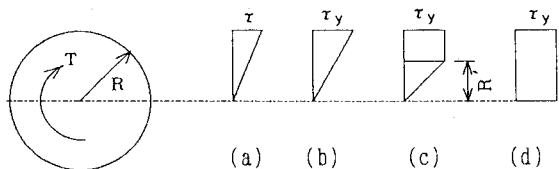


図-3 ねじりによる応力の降伏過程

ると、せん断応力の分布は図-3のようになる。図-2(d)のような全断面塑性となるとき曲げモーメントを M_0 、同様に図-3(d)のような状態となるときねじりモーメントを T_0 とし、

$$m=M/M_0, \quad t=T/T_0 \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

とおくと、曲げとねじりを同時に受けた場合の降伏条件式は、一般に、

$$f(m,t)=0 \quad \cdots \cdots \cdots (3)$$

とおくことができるが、ここでは、

$$m^2+t^2=1 \quad \cdots \cdots \cdots (4)$$

を用いる⁴⁾。また、図-2(b)及び図-3(b)のように、外縁が σ_y 、 τ_y に達したとき(弾性限界)の曲げモーメント、ねじりモーメントをそれぞれ M_y 、 T_y とすると、曲げとねじりを同時に受けた場合の弾性限界となるための条件式は、式(2)と同様な形であると仮定し、

$$m'^2+t'^2=1 \quad \cdots \cdots \cdots (5)$$

とする。ただし、

$$m'=M/M_y, \quad t'=T/T_y \quad \cdots \cdots \cdots (6)$$

である。漸増曲げモーメント、及び漸増ねじりモーメントを受ける断面は、やがて式(5)を満たし、弾性限界に達した後、弾塑性状態を経て最後には、式(4)を満たし全塑性に至る。この過程を図示すれば、図4のようになる。点Aが弾性限界、点Bが弾塑性状態、Cが全塑性を表す。 m_y 、 t_y は、

$$m_y=M_y/M_0, \quad t_y=T_y/T_0 \quad \cdots \cdots \cdots (7)$$

である。

3. 解析手法

式(4)の左辺を F^2 とおくと、

$$F^2=m^2+t^2 \quad \cdots \cdots \cdots (8)$$

$$F=\sqrt{m^2+t^2} \quad \cdots \cdots \cdots (9)$$

となり、 F は、図-4において原点から任意点 (m,t) までの距離を表す。今、図-4において、 $A(m_A, t_A)$ 、 $B(m_B, t_B)$ 、 $C(m_C, t_C)$ とおき、塑性化の程度を表す係数 α を次式により導入する。

$$\alpha=(F_B-F_A)/(F_C-F_A) \quad \cdots \cdots \cdots (10)$$

ここで、 $F_A=\sqrt{m_A^2+t_A^2}$ 、 $F_B=\sqrt{m_B^2+t_B^2}$ 、 $F_C=\sqrt{m_C^2+t_C^2}=1.0$ である。この α は、 $F_B=F_A$ のとき $\alpha=0$ 、 $F_B=F_C$ のとき $\alpha=1$ となり、 $F_A < F_B < F_C$ のとき、すなわち、弾塑性状態のとき、 m と t の変化に伴い、直線的に変化するパラメータで、図-5のように表される。

図-6(a)は、骨組部材の両端における節点 i 、 j が弾性的な場合で、このときの部材要素の剛性マトリックスを K_0 とする。(b)~(d)は一端または両端が塑性ヒンジを形成する場合を示し、そのときの剛性マトリックスをそれぞれ、 K_r 、 K_l 、 K_{lr} とする。塑性ヒンジ法では、断面力の増加に伴って部材端にヒンジを形成する際に、剛性マトリックスが K_0 から K_r または、 K_l 、 K_{lr} へと瞬間的に変化するが、ここでは、なめらかに変化させられるよう、 α に関する簡単な二次式を用いて K_0 を修正する。剛性マトリックスの (m,n) 要素について式で表すと、

$$K_{ep}(m,n)=K_0(m,n) \times f_{mn}(\alpha_i, \alpha_j) \quad \cdots \cdots \cdots (11)$$

となる。ここで、 $K_{ep}(m,n)$ =修正された剛性マトリックスの (m,n) 要素、 $f_{mn}(\alpha_i, \alpha_j)$ =式(10)で与えられる α に関する二次式、添字 i 、 j は節点を表す。図-6(b)について見ると、節点 i は剛結、節点 j は塑性ヒ

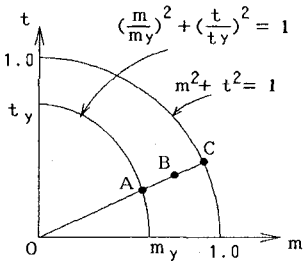


図-4 相関曲線

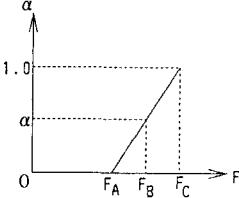


図-5 係数 α

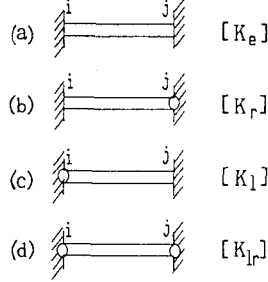


図-6 塑性ヒンジの位置と部材剛性

ンジであるので、式(10)より $\alpha_i=0$ 、 $\alpha_j=1$ 、これを式(11)に代入すると、

$$K_{ep}(m,n)=K_e(m,n) \times f_{mn}(0,1)=K_r(m,n) \dots\dots\dots (12)$$

となる。1節点の自由度を図-7に示すように3自由度とし、節点力ベクトル $\{X\}$ 、節点変位ベクトル $\{u\}$ を $\{X\}^T=\{Y_i, M_i, T_i, Y_j, M_j, T_j\}^T$ 、 $\{u\}^T=\{v_i, \theta_i, \phi_i, v_j, \theta_j, \phi_j\}^T$ とすると、剛性マトリックスの各要素における $f_{mn}(\alpha_i, \alpha_j)$ を求めると、式(13)のようになる。

$$\left. \begin{aligned} f_{11}(\alpha_i, \alpha_j) &= \alpha_i^2/4 + \alpha_j^2/4 + \alpha_i \alpha_j/2 - \alpha_i - \alpha_j + 1 & f_{14}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{11}(\alpha_i, \alpha_j) \\ f_{12}(\alpha_i, \alpha_j) &= \alpha_i^2/2 + \alpha_i \alpha_j/2 - 3\alpha_i/2 - \alpha_j/2 + 1 & f_{24}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{12}(\alpha_i, \alpha_j) \\ f_{15}(\alpha_i, \alpha_j) &= \alpha_i^2/2 + \alpha_i \alpha_j/2 - \alpha_i/2 - 3\alpha_j/2 + 1 & f_{33}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{25}(\alpha_i, \alpha_j) \\ f_{22}(\alpha_i, \alpha_j) &= 3\alpha_i^2/4 + \alpha_i \alpha_j/4 - 7\alpha_i/4 - \alpha_j/4 + 1 & f_{36}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{25}(\alpha_i, \alpha_j) \\ f_{15}(\alpha_i, \alpha_j) &= \alpha_i \alpha_j - \alpha_i - \alpha_j + 1 & f_{44}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{11}(\alpha_i, \alpha_j) \\ f_{55}(\alpha_i, \alpha_j) &= 3\alpha_j^2/4 + \alpha_i \alpha_j/4 - \alpha_i/4 - 7\alpha_j/4 + 1 & f_{45}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{15}(\alpha_i, \alpha_j) \\ & & f_{66}(\alpha_i, \alpha_j) &= f_{25}(\alpha_i, \alpha_j) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

図-5において、増加する荷重に対して式(9)の P が P_A に達した後、漸増する荷重に対して式(10)より α を求め、式(11)により剛性マトリックスを修正しながら、 P_C に到達するまで計算をすることにより、塑性崩壊荷重と変位を求めることができる。

4. 計算例

4.1 片持ばり

格子桁で解析する前に、図-8のような簡単な片持ばりの先端に P が作用した場合のたわみを解析した。断面諸元は、断面2次モーメント $I=54[\text{cm}^4]$ 、スパン $l=120[\text{cm}]$ 、降伏モーメント $M_y=43200[\text{kgcm}]$ 、全塑性モーメント $M_a=64800[\text{kgcm}]$ である。塑性ヒンジ法による場合は、 $P=P_a$ に達した瞬間支点において全塑性状態になり、崩壊する。本法による場合は、 $P=P_y$ に達したとき、すなわちばりの断面の外縁において塑性となるときからたわみが大きくなりはじめ、崩壊荷重に達したときには、たわみは塑性ヒンジ法による場合の約1.5倍となる。点線は、曲げモーメントと曲率の関係からコンプリメンタリーエネルギーを求め、カステリヤノの定理を用いてたわみを計算した結果で、厳密解と考えられる³⁾。本法と厳密解は、非常に良く一致している。

4.2 格子桁(主桁3本、横桁3本)

図-9に示すような簡単な格子桁について計算した。主桁、横桁はともに直径5[cm]の円形断面とし、断面諸元を計算すると、 $I=30.68[\text{cm}^4]$ 、 $J_T=61.35[\text{cm}^4]$ 、 $M_y=29452[\text{kgcm}]$ 、 $M_a=50000[\text{kgcm}]$ 、 $T_y=34009[\text{kgcm}]$ (降伏ねじりモーメント)、 $T_a=45345[\text{kgcm}]$ (全塑性ねじりモーメント)である。 $P=1.07[\text{t}]$ で点Aにおいて最初に降伏が始まり、以後降伏する断面が増えるに従って、たわみの値が塑性ヒンジ法による解よりも大きくなっていく。最終的な崩壊機構は、A、B、Cの点が塑性ヒンジを形成するときであり、崩壊荷重は、 $P=2.91[\text{t}]$ である。図-10は、降伏曲線の相関図に点A、B、Cにおける (m, t) の値をプロットし

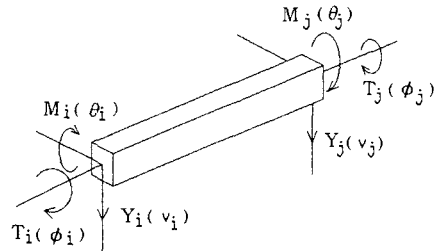


図-7 節点変位、節点力

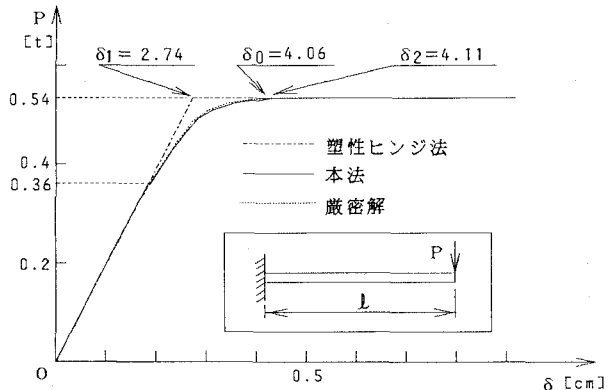


図-8 片持ばり

たものである。内側の楕円に達すると弾性限界となり、断面の一部が降伏し始め、外側の円に達したときに全塑性になることを示している。3点ともに、曲げとねじりが連成しているが、曲げがより大きな割合を占めて崩壊に至っていることが分かる。

5. おわりに

断面が降伏し始めてから、全塑性に至るまでの過程を、断面力 M 、 T から塑性化の程度を表す係数 α を導入し、これを用いて剛性マトリックスを修正することにより、弾塑性状態を考慮することができた。本報告の特徴としては、(1)係数 α は、弾性のとき $\alpha=0$ 、全塑性のとき $\alpha=1$ 、弾塑性のとき α は0から1まで直線的に変化するという単純なパラメータであり、取り扱いが簡単である。(2)この α を用いることにより、塑性ヒンジ法に見られるような弾性から塑性への急激な変化が、なめらかに変化するように改良された。という点を挙げることができる。数値計算結果は、4.1、4.2に示した通りで、特に曲げのみを考慮した場合の4.1に関しては、エネルギー法による厳密解とよく一致した。今後の課題としては、塑性域が広がることによる部材の剛性の低下をより正確に考慮すること、ひずみ硬化や幾何学的非線形性を考慮することが考えられる。

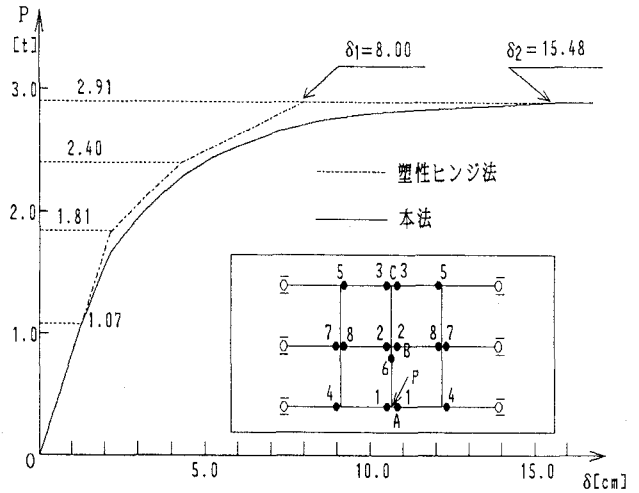


図-9 格子桁

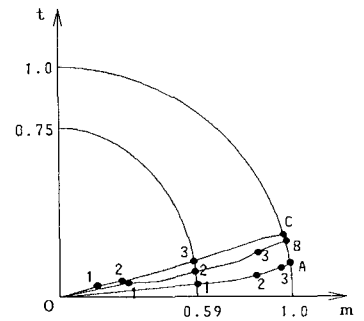


図-10 相關図

<参考文献>

- 1) 渡辺昇、林川俊郎、岡田泰三：薄肉I形断面をもつ曲線格子桁の弾塑性解析に関する研究、北海道大学工学部研究報告、第126号、pp.1-14、1985
- 2) 今井富士夫、太田俊昭、大塚久哲：横構を有する並列曲線I桁橋の崩壊挙動に関する研究、構造工学論文集、Vol132A、pp.411-419、1986
- 3) 山崎徳也、太田俊昭、石川信隆：補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析、土木学会論文集 No.134、pp.14-32、1966
- 4) Philip G. Hodge, Jr、倉西正嗣外共訳：構造物の塑性解析、コロナ社
- 5) Toshiro Hayashikawa, Noboru Watanabe, and Hisashi Ohshima: ON THE LIMIT ANALYSIS OF GRILLAGE GIRDERS, J.CIVIL ENG. DESIGN、2(4)、379-395、1980
- 6) W.S.King、D.W.White、W.F.Chen: SECOND-ORDER INELASTIC ANALYSIS METHODS FOR STEEL-FRAME DESIGN、J.Struct.Engrg.、ASCE、118(2)、pp.408-428、1992
- 7) 成岡昌夫、服部正、加藤進、後藤茂夫、上田幸雄：骨組構造解析、培風館
- 8) 田中尚：構造物の極限解析、彰国社