I－2

代用電荷法の平板解析への適用性について

北海道大学工学部　　　　西川　実
北海道大学工学部　正員　佐藤 浩一

1.まえがき

現在、構造解析の分野において、有限要素法(FEM)あるいは境界要素法(BEM)が広く用いられている。これらの解析手法にはそれぞれ長所、短所があるが、有限要素法の短所は領域分割によって未知数が増大し、入力データ数が増え演算時間も長くなる点であるといえよう。これに対し、離散化に境界分割を用いるが、境界条件式を得るために数値積分を必要としない偏微分方程式の近似解法として代用電荷法(Charge Simulation Method)が電気工学の分野で発展してきた[1]。本論文の目的は、有限要素法に代わり代用電荷法の平板解析への適用性について検討し、円形板および長方形板の数値解析を行ったので報告するものである。

2.代用電荷法

2-1.代用電荷法の特徴

境界値問題を等価な積分方程式に変換する方法として重みつき残差法が用いられる。有限要素法では、この重み関数に形状関数を用いるが、境界要素法および代用電荷法ではグリーン関数を用いている。また、有限要素法では離散化に領域分割を行うが、代用電荷法は境界要素法と同様、境界分割を行うため次元が一次元小さくなり入力データ数が減少するという利点を有している。境界要素法と代用電荷法には、このような共通点があるが、その境界条件の定式化の仕方に違いがある[2]。境界要素法では、境界積分方程式を数値積分して連立一次方程式の形の近似境界条件式を得るのに対し、代用電荷法では境界積分方程式をグリーン関数の一次結合で近似した形で境界条件式を得る[1]。このことにより数値積分を必要とせず、プログラミングが容易になるという利点を有している。

2-2.代用電荷法の原理

図-1のような領域において、次のラプラス方程式に対し代用電荷法を適用した場合を考える。

$$(\partial^2/\partial^2 x+\partial^2/\partial^2 y)\psi(x,y)=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\psi(x,y)=f(s) \qquad \cdots\cdots(2)$$

グリーン関数の重ね合わせ法では、解を次のような一次結合で表す。

$$\phi(x,y)=\sum_{i=1}^{n} Q_i G(x,y;\alpha_i,\beta_i) \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここで、　Q_i ：未定係数

$G(x,y;\alpha_i,\beta_i)$

：(α_i,β_i) を荷重点とするグリーン関数

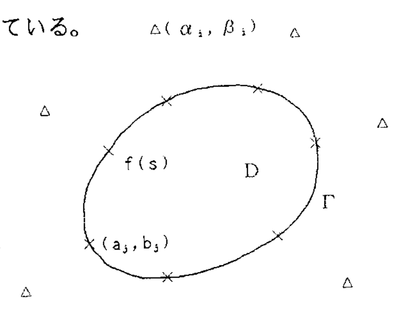

図-1 代用電荷法(CSM)

二次元ラプラス方程式の場合は、

$$G(x,y;\alpha_i,\beta_i)=(-1/2\pi)\ln\sqrt{(x-\alpha_i)^2+(y-\beta_i)^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

で表される。近似解$\phi(x,y)$は、n個の荷重点を領域の外に置けば、常に式(1)を満足する。したがって、

On Application of Charge Simulation Method to Analyses of Plates
by Minoru NISHIKAWA and Koichi SATO

n個の拘束点を選び、その点で境界条件式(2)を満たすように未定係数を決定すれば、近似解が得られる。n個の拘束点(a_j, b_j)で境界条件を満たすとすると、

$$\phi(a_j, b_j)=\sum_{i=1}^{n} Q_i G(a_j, b_j; \alpha_i, \beta_i)=f(s_j) \quad \cdots\cdots(5)$$

となる。式(5)は、Q_i に関する2n元連立方程式であり、ガウスの消去法等の直接法で解を求めることができる。求めたQ_i を式(3)に代入することにより近似解$\phi(x,y)$ が求められる。

3.代用電荷法による平板の解析

3-1.代用電荷法の平板解析への適用

平板解析を行う場合、次の二次元重調和方程式に代用電荷法を適用する。

$$\nabla^4 w(x,y)=q(x,y)/D \quad \cdots\cdots(6)$$

(1).直接法

式(6)の右辺が、単位集中荷重 $q(x,y)=-\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)$でD=1の場合の解が次のグリーン関数で与えられる。

$$G_2(x, y; \xi, \eta)=(-1/8\pi)\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\{\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-1\} \quad \cdots\cdots(7)$$

式(7)を重ね合わせて一般解を表現するが、この他にラプラス方程式のグリーン関数も重ね合わせなければならない。

$$G_1(x, y; \xi, \eta)=(-1/2\pi)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \quad \cdots\cdots(8)$$

上の二つのグリーン関数には次式が成り立つ。

$$\nabla^2 G_2=G_1 \quad \cdots\cdots(9)$$

グリーン関数が与えられると、たわみ $w(x,y)$に対する近似解ϕはQ_i、M_iを未定係数として次式のように表現できる。

$$\phi(x,y)=S_2(x,y)+\sum_{i=1}^{n} Q_i G_2(x, y; \alpha_i, \beta_i)+\sum_{i=1}^{n} M_i G_1(x, y; \gamma_i, \delta_i) \quad \cdots\cdots(10)$$

$S_2(x,y)$は、求める荷重によるたわみに相当し、次のグリーン関数で与えられる。

集中荷重：$S_2(x,y)=(-1/8\pi)\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\{\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-1\}$ $\cdots(11)$

分布荷重：$S_2(x,y)=(1/64)(x^2+y^2)^2$ $\cdots\cdots(12)$

式(10)に対しn個の拘束点において二つの境界条件式を課すことによりQ_i、M_iに関する2n元連立方程式が得られる。この方程式を解くことにより求まるQ_i、M_iを式(10)に代入したわみの近似解$\phi(x,y)$が得られる。

(2).二段階法

直線境界単純支持板に対しては、直接法の他に式(6)を二つのポアソン方程式に分け二度、連立方程式を解くことにより解を求める方法がある。$\psi(x,y)=(\partial^2 w/\partial x^2)+(\partial^2 w/\partial y^2)$とすると式(6)は、

$$\nabla^2 \psi(x,y)=q(x,y)/D \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\nabla^2 w(x,y)=\psi(x,y) \quad \cdots\cdots(14)$$

という二つのポアソン方程式に分けられる。また、境界条件式は

$$w(x,y)=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\psi(x,y)=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

となる。

（第一段階）　式(13)の特解が、ポアソン方程式に対するグリーン関数

$$S_1(x,y)=(-1/2\pi)\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \quad \cdots\cdots(17)$$

で与えられ、$\psi(x,y)$ は代用荷重Qi、代用荷重点（α_i, β_i)を用いて次のように表される。

$$\psi(x,y)=S_1(x,y)+\sum_{i=1}^{n} Q_i G_1(x, y; \alpha_i, \beta_i) \quad \cdots\cdots(18)$$

境界上にとった拘束点(a_j, b_j)で式(16)を課すと

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i G_1(a_j,b_j;\alpha_i,\beta_i) = -S_1(a_j,b_j) \qquad \cdots(19)$$

であり、これを解くことにより最初のポアソン方程式に対する解が得られる。

（第二段階）　最初のポアソン方程式に対する解を代入すると式(14)は、次のように表される。

$$\nabla^2 w(x,y) = S_1(x,y) + \sum_{i=1}^{n} Q_i G_1(x,y;\alpha_i,\beta_i) \qquad \cdots(20)$$

この方程式に対する特解は、次式で表される。

$$H(x,y) = S_2(x,y) + \sum_{i=1}^{n} Q_i G_2(x,y;\alpha_i,\beta_i) \qquad \cdots(21)$$

ここで、$\nabla^2 S_2 = S_1$であり、

$$S_2(x,y) = (-1/8\pi)\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\}\{\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-1\} \qquad \cdots(22)$$

である。特解がわかれば式(14)は

$$w(x,y) = H(x,y) + \sum_{i=1}^{n} M_i G_1(x,y;\gamma_i,\delta_i) \qquad \cdots(23)$$

で表され境界条件式(15)を課しM_iが求まると解が得られる。

3-2.円形板の解析

周辺単純支持板および周辺固定板の等分布満載荷重、集中荷重に対するたわみを代用電荷法を用い計算した。円形板の半径は2とし、代用荷重点の配置は図-2のような2つのタイプとした。中心からの距離rと計算により求めたたわみの関係を公式集[3]による値と比較しグラフに表したものが図-3である。いずれの支持条件、荷重条件に対しても公式集による値とよく一致しているといえる。

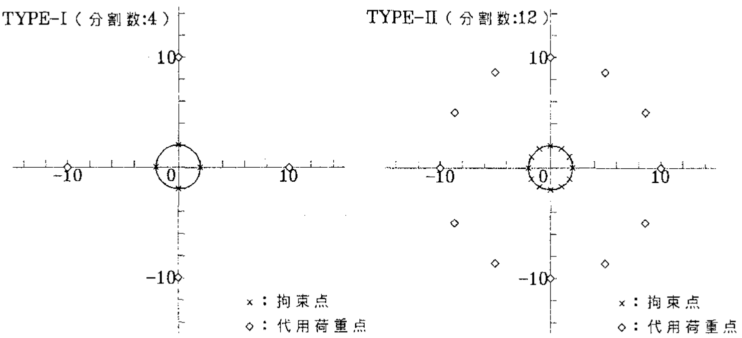

図-2 代用荷重点配置

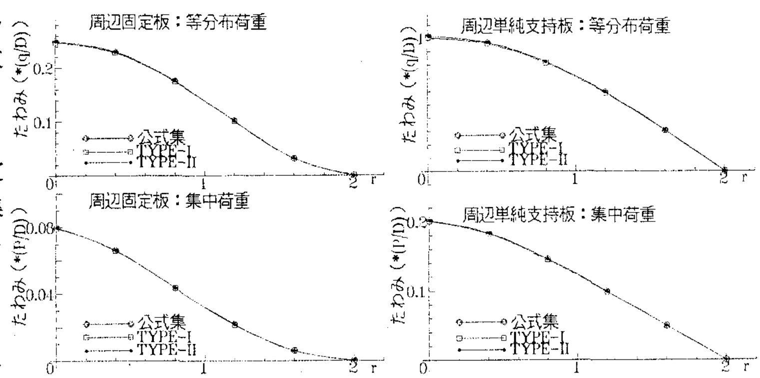

図-3 円形板のたわみ

3-3.長方形板の解析

四辺単純支持および四辺固定正方形板の等分布満載荷重、集中荷重に対するたわみおよびモーメントを計算により求めた。正方形の一辺の長さは4とし、代用荷重点の配置は、図-4のようにした。

表-1、表-2は四辺固定板の中心での最大たわみおよび中心と境界での曲げモーメントを公式集[3]による値と比較したものである。いずれの値も公式集による値とよく一致している。

表-3は、四辺単純支持板における最大たわみを公式集による値および有限要素法[4]により計算した値と比較したものである。有限要素法では図-5のように、正方形の1/4を23節点30要素に要素分割し計算した。また、代用電荷法では直線境界単純支持板の場合、直接法および二段階法の二つの値を表に示した。また、図-6および図-7は、x軸上における中心から境界までのたわみを、フーリエ級数を10項まで展開したものおよび有限要素法により計算したものと比較しグラフに表したものである。単純支持板の場合も固定の場合と同様、計算値が公式集による値とよく一致しているといえる。有限要素法と比較しても、その精度の良さがわかる。

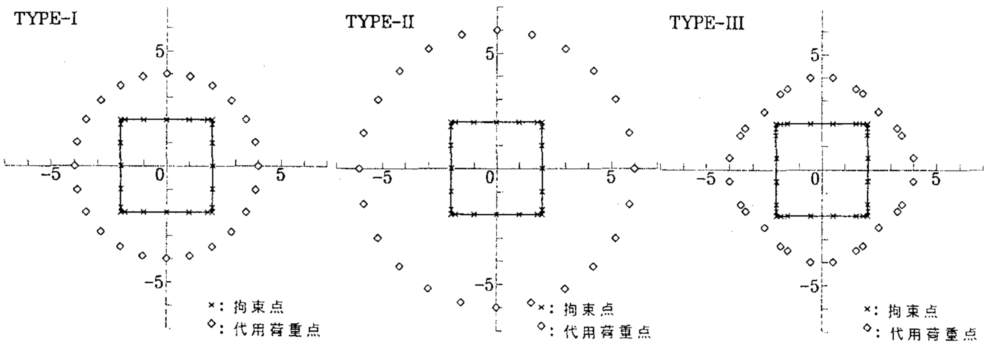

図-4 代用荷重点配置

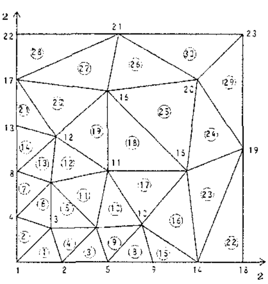

図-5 要素分割(FEM)

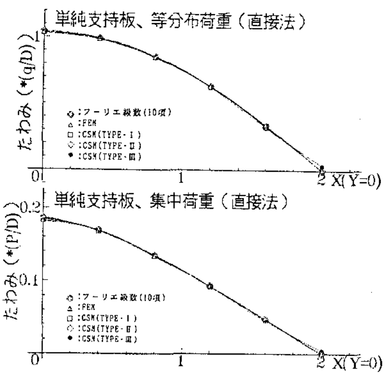

図-6 たわみ(直接法)

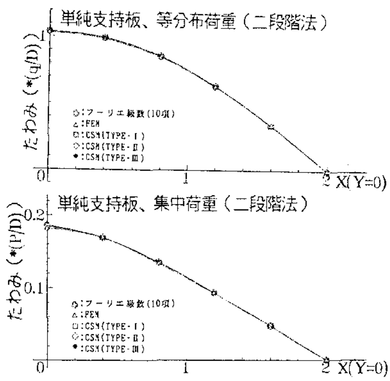

図-7 たわみ(二段階法)

表-1

四辺固定板最大たわみ　(一辺a=4)			
		等分布荷重 w_{max}(*q/D)	集中荷重 w_{max}(*P/D)
公式集		$0.00126a^4$ =0.32256	$0.0056a^2$ =0.0896
計算値	TYPE-I	0.32414	0.08966
	TYPE-II	0.32309	0.08940
	TYPE-III	0.32340	0.08979

表-2

四辺固定板曲げモーメント　(一辺a=4)				
		等分布荷重 M_x(*q) (x=0,y=0)	(x=a/2,y=0)	集中荷重 M_x(*P) (x=a/2,y=0)
公式集		$0.0231a^2$ =0.37068	$-0.0513a^2$ =-0.8208	-0.1257
計算値	TYPE-I	0.36669	-0.81298	-0.12662
	TYPE-II	0.36667	-0.82441	-0.12659
	TYPE-III	0.36631	-0.79822	-0.12099

表-3

四辺単純支持板最大たわみ　(一辺a=4)					
		等分布荷重 w_{max}(*q/D)		集中荷重 w_{max}(*P/D)	
公式集		$0.00406a^4$ =1.03936		$0.0116a^2$ =0.1856	
FEM		1.030		0.1614	
		直接法	二段階法	直接法	二段階法
計算値	TYPE-I	1.0327	1.0402	0.18474	0.18561
	TYPE-II	1.0469	1.0386	0.18641	0.18558
	TYPE-III	1.0321	1.0405	0.18513	0.18562

4.あとがき

代用電荷法の平板解析への適用性について検討を行い、数値解析によりいずれの境界条件、荷重条件に対しても公式集[3]による値とよく一致することが確認された。円形板のようになめらかな境界を有するものでは、その分割数をかなり少なくしても精度の良い解が得られることがわかる。また、長方形板のように境界がなめらかでない場合、代用荷重点のとり方が一つの問題であるが、TYPEⅠ,Ⅱのように円周上に等間隔にとった場合でも、その拘束点を角の付近で密に配置すればよい解が得られることがわかる。正方形単純支持板の場合に比較に用いた有限要素法では、分割数を増やせば精度のよい解が得られると思われるが、この程度の分割数でも代用電荷法の場合より計算時間は長くかかり、この点においても代用電荷法が有効な手法であると思われる。

＜参考文献＞

1)村島 定行 : 代用電荷法とその応用;森北出版,1983.

2)村瀬 治比古、小山 修平、石田 良平 : 順･逆解析入門;森北出版,1990.

3)土木学会編 : 構造力学公式集,1986.

4)小堀 為雄、吉田 博 : 有限要素法による構造解析プログラム;丸善,1980.