

I-1 せん断変形を考慮したエアビームの曲げ解析

北海道大学工学部 正 員 林 川 俊 郎
北海道大学工学部 中 村 範 一

1. はじめに

最近、土木作業現場での人手不足等により、コンクリートの打設時における能率化および作業性が問題となっている。また、NATM工法では、モルタル吹き付け作業による粉塵が問題となることがある。このような問題の解決方法の一つとして、エアマットをコンクリート打設時の型枠として利用する方法が考えられている^{1), 2)}。

エアマットは図-1のように、ネオプレン被覆したナイロン布を、またはそれを数層に積層した膜板を上下の外皮として、それを落とし糸で結び付けたものである。この落とし糸によりエアマットの形状が維持される構造になっている。このようなエアマットはジャンボ機あるいは車両のジャッキアップに使用されている。

現在まで、エアマットに関する研究としては外圧とたわみの関係について検討した林・赤坂等の研究³⁾、四辺単純支持されたエアマットの変形性状に関する研究¹⁾等がある。ここでは、エアマットをNATM工法等のトンネル工事のコンクリート型枠に適用することを前提として、奥行き方向の単位幅当り（平面問題）の変形挙動について検討する。つまり、エアマットのy方向の単位幅当りの曲げ解析をエアビームとしてモデル化し、せん断変形の影響が大きいことから、Timoshenko梁として有限要素法による解析を試みる。

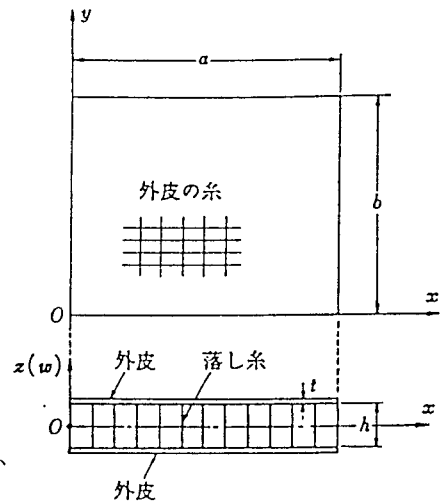


図-1 エアビーム

2. エアマットの基礎微分方程式

エアマットについてはすでに数多くの研究がなされており、その中でも林・赤坂等³⁾は軸力、曲げモーメントおよびせん断力に関するつりあい方程式を以下のように導いている（図-2参照）。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2) \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

さらに、エアマットの断面力については以下のような式が導かれる（図-3参照）。

$$M_x = -\frac{h^2}{2} \left(C_{xx} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_{xy} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (6)$$

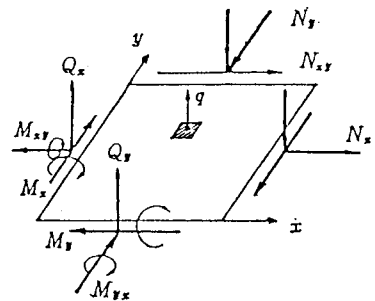


図-2 膜力、モーメントおよびせん断力

$$M_y = -\frac{h^2}{2} \left(C_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + C_y \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (7)$$

$$M_{xy} = -\frac{h^2}{2} C_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$-Q_x = ph \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \right) \quad (9)$$

$$-Q_y = ph \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta \right) \quad (10)$$

ここに、

$$C_x = \frac{E_x t}{1 - \mu_x \mu_y} \quad (11), \quad C_y = \frac{E_y t}{1 - \mu_x \mu_y} \quad (12), \quad C_{xy} = C_{yx} = \frac{\mu_y E_x t}{1 - \mu_x \mu_y} \quad (13)$$

ここで、 E_x 、 E_y 、 μ_x 、 μ_y 、 t 、 p 、 h はそれぞれ外皮としての、膜のヤング係数、ポアソン比、肉厚、およびエアマットの内圧、高さである。

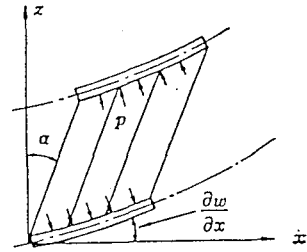


図-3 α の定義

3. 一方向支持のエアマット

エアマットの理論は2次元の板理論であり、これを1次元の梁理論として適用するための準備として一方向支持のエアマットについて考える。

$x=0$ および $x=l$ で単純支持され、 y 方向に一樣な荷重を受ける場合、 y 方向単位長さ当りの断面力については式(6)~(10)から以下のような式が導かれる。

$$Q_x = ph \left(\frac{dw}{dx} - \alpha \right), \quad Q_y = 0 \quad (14), \quad M_x = -\frac{h^2}{2} C_x \frac{d\alpha}{dx} \quad (15)$$

4. Timoshenko梁理論

有限要素法(F.E.M.)によりエアビームの曲げ解析を行うためには、剛性マトリックスを作成する必要がある。ここでは、以下に示すTimoshenko梁の基礎微分方程式および断面力より剛性マトリックスを誘導する。

[基礎微分方程式]

$$GkA \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\phi}{dx} \right) = -q \quad (16), \quad EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} + GkA \left(\frac{dw}{dx} - \phi \right) = 0 \quad (17)$$

[断面力]

$$Q_x = GkA \left(\frac{dw}{dx} - \phi \right) \quad (18), \quad M_x = EI \frac{d\phi}{dx} \quad (19)$$

ここで、 E 、 G 、 I 、 A 、 k は梁のヤング係数、せん断弾性係数、断面2次モーメント、断面積、有効せん断係数であり、また、 q 、 ϕ は等分布荷重、梁の軸方向に垂直な断面の傾斜角である。

これらから剛性マトリックスを誘導する場合に、部材要素の節点間に外部荷重が作用していないものとするれば、式(16)より

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \quad (20)$$

さらに、式(16)、(17)より

$$EI \frac{d^3 \phi}{dx^3} = EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (21)$$

したがって、式(21)より w および ϕ は次のように求められる。

$$W = \frac{1}{6} a_1 x^3 + \frac{1}{2} a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (22), \quad \phi = \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \quad (23)$$

ただし、式(22)の $a_1 \sim a_4$ および式(23)の $c_1 \sim c_3$ は積分定数である。

ここで、式(22)および式(23)を式(17)、(20)に代入して $a_1 \sim a_4$ と $c_1 \sim c_3$ との関係を求める。すると、式(23)は改めて次のように表せる。

$$\phi = \frac{1}{2} a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \frac{EI}{GkA} a_1 \quad (24)$$

式(22)、(24)から部材要素の節点変位は積分定数 $a_1 \sim a_4$ で表わされ、これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$U = AC \quad (25) \quad \text{ここで、} U = \{W_1, \phi_1, W_2, \phi_2\}^T \quad (26), \quad C = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T \quad (27)$$

また、 A は4行4列の係数マトリックスである。

次に、式(22)および(24)を式(18)、(19)に代入し、部材要素の節点力を積分定数で表現すると、次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$F = BC \quad (28) \quad \text{ここで、} F = \{Q_1, M_1, Q_2, M_2\}^T \quad (29)$$

また、 B は4行4列の係数マトリックスである。ゆえに、式(25)と式(28)より積分定数ベクトルを消去し、 $K = BA^{-1}$ とおくと、最終的に次のような剛性方程式が得られる。

$$F = BA^{-1}U = KU \quad (30)$$

この4行4列の正方マトリックス K が求める剛性マトリックスで、具体的には次のように表される。

[剛性マトリックス]

$$K = \frac{EI}{l^3(1+\lambda)} \begin{matrix} & \begin{matrix} 12 & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} -6l \\ -12 \\ -6l \end{matrix} & \begin{matrix} l^2(4+\lambda) \\ 6l \\ l^2(2-\lambda) \end{matrix} & \begin{matrix} 12 \\ 12 \\ 6l \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ l^2(4+\lambda) \end{matrix} \end{matrix} \quad \text{Sym.} \quad (31) \quad \text{ここで、} \lambda = \frac{12EI}{GkAl^2} \quad (32)$$

5. 数値計算結果

5-1 断面定数の換算

前節ではTimoshenko梁理論から、個々の部材要素に関する剛性マトリックスを誘導した。ここでは、エアビームとしての数値計算に必要な断面定数の算出方法を示す。一方向支持のエアマットの単位幅当りの断面力(式(14)、(15)を参照)とTimoshenko梁の断面力(式(18)、(19)を参照)との比較により、また、 $\phi \equiv \alpha$ と仮定すると以下の式が導かれる。

$$GkA = ph \quad (33), \quad EI = \frac{C_\lambda h^2}{2} \quad (34)$$

式(33)、(34)の右辺はエアマットを構成する外皮と空気特性(膜のヤング係数、肉厚、および内圧等)により決定するものである。この2式により、エアビームの梁としてのヤング係数、せん断係数および有効せん断係数を算出する。具体的には、エアビームの断面2次モーメントと断面積を I および A とすると、以下の式よりエアビームの E 、 G 、 k を計算することができる。

$$E = \frac{C_\lambda h^2}{2I} \quad (35), \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (36), \quad k = \frac{ph}{GA} \quad (37)$$

ここで、 ν はエアビームの膜のポアソン比である。

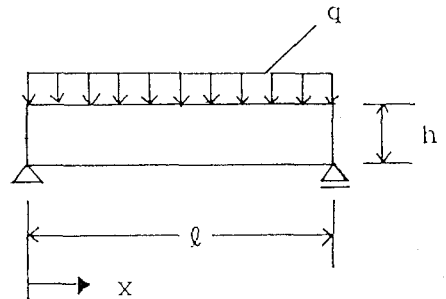


図-4 数値計算に用いた単純梁

5-2 計算例

ここでは、数値計算例として、図-4に示すような等分布荷重を受ける単純梁を取り上げ、分割数による支間中央点のたわみの収束性の検討およびエアマットの理論値との比較を試みる。数値計算に用いる数値は以下の通りである。梁の長さ $l=180\text{cm}$ 、梁の高さ $h=30\text{cm}$ 、膜のヤング係数 $E_s=800\text{kgf/cm}^2$ 、肉厚 $t=0.15\text{cm}$ 、ポアソン比 $\mu_x=\mu_y=0.5$ 。

5-3 たわみの収束性

有限要素法による解析において、分割数は解析の結果を左右する要因の一つである。

解析値の妥当性を判断する基準として、分割数による梁の支間中央点のたわみの収束性について検討する。その結果が表-1に示されている。分割数が8以上になるとたわみの値はほぼ一定となる。このことから、本解析では分割数16以上にすれば妥当な解が得られると考えられる。

5-4 一方向支持のエアマットの数値解との比較

図-4に示すような数値計算例について、すでに吉田⁴⁾が求めた一方向支持のエアマットとしての計算値(表中では「エアマット」と示す)と有限要素法による解析値(表中では「F.E.M.」と示す)が表-2に示されている。この表より、両者のたわみ値はほぼ一致しており、良好な解が得られている。また、たわみ値は曲げ変形よりもせん断変形の占める割合が大きいことがわかる。

表-2 一方向支持のエアマットの数値解との比較

荷重 (kgf/cm^2)	内圧 (kgf/cm^2)	たわみ(cm)		曲げ変形の割合(%)		せん断変形の割合(%)	
		エアマット	F.E.M.	エアマット	F.E.M.	エアマット	F.E.M.
0.0141	0.10	21.7	21.69	12.4	12.4	87.6	87.6
	0.15	15.3	15.35	17.5	17.4	82.5	82.6
	0.20	12.2	12.18	22.0	22.0	78.0	78.0
0.0287	0.10	44.2	44.16	12.3	12.3	87.7	87.7
	0.15	31.3	31.25	17.4	17.4	82.6	82.6
	0.20	24.8	24.80	22.0	22.0	78.0	78.0

6. あとがき

本研究はエアビームの曲げ解析に必要な断面定数、ヤング係数E、せん断弾性係数G、および有効せん断係数kの算定法について提案した。さらに、Timoshenko梁理論を用いたエアビームの有限要素解析の一例として、一様分布荷重を受ける単純梁の曲げ解析を行い、たわみの収束性とその解の妥当性を確認した。今後の研究課題として、コンクリート打設圧を受けるアーチ形状のエアビームの変形性状について検討して行きたい。最後に、有限要素法の解析プログラムの作成には、北海道大学工学部平沢秀之助手のご協力を得たことに感謝の意を表します。

(参考文献)

- 1) 吉田安範他：コンクリート型枠として用いたエアマットの変形性状について，土木学会北海道支部論文報告集，第48号，pp881-886，1992.
- 2) 上田多門他：空気型枠の力学挙動に関する実験的研究，土木学会第47回年次学術講演会，pp554-555，1992.
- 3) 林毅・赤坂隆他：軽構造の理論とその応用(下)，日本科学技術連盟，1966.
- 4) 吉田安範：コンクリート型枠として用いたエアマットの変形性状，北海道大学卒業論文，1992.