II－78

数値波動解法に於ける開放境界

パシフィックコンサルタント　正　員　古屋温美
パシフィックコンサルタント　正　員　寺島貴志
北海道大学工学部　正　員　浜中建一郎

１．はじめに

数値解析を用いて波動場の計算をする際、しばしば計算機のメモリーの節約のため、海洋上に仮想の境界を設ける必要にせまられる。この境界はあくまで仮想のものであるから、計算領域内からこの境界に向かう波はここを自由に通過していくことが要求される。この意味でこの仮想境界のことを開放境界と呼んでいる。本来、差分による数値計算は求めようとする格子点の回りの格子点の値を常に必要としているのに対し、仮想境界上では領域内にしか格子点がないのであるから通常の差分スキームは使えず、なんらかの特別な工夫が必要となる。これまでこの問題に対していくつかの方法が提案されてきている。良く使われる方法としては、何らかの方法で領域内から境界に向かう波の波向きを推定し境界上の値を求める方法や、計算領域の外に特別の計算帯を設けそこで大きな人工摩擦係数を与えて波を消す方法である。しかしながら第１の方法は、境界に向かう波がただ一つの場合は有効と思われるが、領域内の物理的境界から反射してきた波等、複数の波が存在するときは適用不可能となる。また、第２の方法では、少ない仮想点で波を消すためには人工摩擦係数を大きく与えなければならず、そうすればそこから波の反射が発生し、波の反射をおさえようとすれば多くの仮想点が必要となるという矛盾を含んでいる。

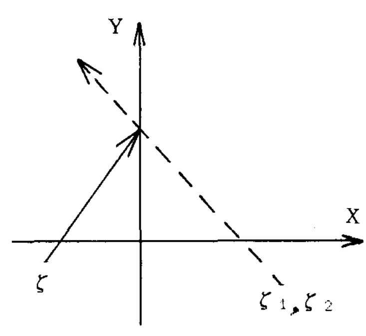
これらに対し、あまり良く使われているとは思えないが重ね合わせの原理を用いた方法というのが提案されている。これは、位相が逆になるような反射波を発生させる二つの仮想境界条件を与えた計算を別々にしておき、最後に全領域にわたって重ね合わせ、仮想境界からの反射波を消すというものである。しかしながらこの方法も、複数の開放境界がある場合は各々に２面づつの計算領域を設けなければならないとして批判されている。これに対し、全領域で重ね合わせるのではなく、計算時間ステップを一つ進める毎に境界上で重ね合わせを行いただちに通過波の諸量を求めるという”瞬時重ね合わせ法”とでも呼ぶべき方法が提案されている。著者等もこれまで長波の数値計算にこの方法を適用した場合について、開放境界での誤差やそれに伴う境界からの反射波の反射率等を調べてきた（Hamanaka and Furuya 1990，久連山・浜中 1991）。それによれば、この方法も完全とは言えずいくつかの問題が存在することが分かった。このことから本研究では、長波に限らず一般波動場での開放境界について特に重ね合わせ法を中心としてその問題点を整理し、今後の可能性を調べてみた。

２．重ね合わせの原理

はじめに重ね合わせの原理を簡単に説明する。今$x=0$のy軸を仮想境界とし、$x<0$の領域から波が境界に向かって進行しているとする。

$$\begin{aligned} \zeta &= \cos(lx + my - \omega t) \\ M &= l\,n\cos(lx + my - \omega t) \\ N &= m\,n\cos(lx + my - \omega t) \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで　ζ；水面波形　，M；x方向の流量　，N；y方向の流量
k；波数　，ω；周波数　，(l,m)；kのx,y成分　，$n=\omega/k^2$



図－１　仮想反射概念図

Open boundary in numerical anaiysis of wave fields
by Atsumi FURUYA,Takasi TERASIMA and Ken-ichiro HAMANAKA

今、y軸から逆位相の２つの波が反射したとし、添え字1と2を用いて表すと

$$\zeta_1 = \cos(-l x + m y - \omega t) \qquad \zeta_2 = -\cos(-l x + m y - \omega t)$$
$$M_1 = l n \cos(-l x + m y - \omega t) \quad (2) \qquad M_2 = l n \cos(-l x + m y - \omega t) \quad (3)$$
$$N_1 = m n \cos(-l x + m y - \omega t) \qquad N_2 = -m n \cos(-l x + m y - \omega t)$$

入射波と反射波を重ねると

$$\zeta + \zeta_1 = \cos(l x + m y - \omega t) + \cos(-l x + m y - \omega t)$$
$$M + M_1 = l n \{\cos(l x + m y - \omega t) + \cos(-l x + m y - \omega t)\} \qquad (4)$$
$$N + N_1 = m n \{\cos(l x + m y - \omega t) + \cos(-l x + m y - \omega t)\}$$
$$\zeta + \zeta_2 = \cos(l x + m y - \omega t) - \cos(-l x + m y - \omega t)$$
$$M + M_2 = l n \{\cos(l x + m y - \omega t) + \cos(-l x + m y - \omega t)\} \qquad (5)$$
$$N + N_2 = m n \{\cos(l x + m y - \omega t) + \cos(-l x + m y - \omega t)\}$$

(4)、(5)からx=0の境界上での自明の値と、x及び-xでの値の対称性を調べると

	x=0	xと-x		x=0	xと-x
$\zeta+\zeta_1$		同	$\zeta+\zeta_2$	0	異
$M + M_1$	0	異	$M + M_2$		同
$N + N_1$		同	$N + N_2$	0	異

ここで同異は値の対称性を示し同とは2点で値が等しく、異とは符号を異にするという意味である。
このことから、境界上で M=0 とすることが $\zeta 1$ のタイプの反射波を生じさせるための境界条件（反射条件１）となり $\zeta = 0$ 又は $N = 0$ とすることが $\zeta 2$ のタイプの反射波を生じさせるための条件（反射条件２）となることがわかる。又、境界上がその値の計算点ではない場合（リープブロック法のスキームでは起こる）x と -x での値の対称性から同様の反射条件を与えることができる。
従って、これらの条件の中から適当に選んで、2種類の反射波を生じさせることができれば、最後に重ね合わせることにより、反射波を消すことができそうである。
これが、重ね合わせの原理である。これをここでは完全重ね合わせ法と呼ぶ。

３．数値波動解法の基礎方程式

数値波動解法に用いられる基礎方程式は幾つか提案されているが、大別すると、時間方向には周期解を、水深方向の流速分布は微小振幅波のそれを仮定して導かれる楕円形の方程式と、時間方向の微分波残した時間発展形のものとに分けられる。そのうち、前者は楕円形であるため、境界条件の影響が領域全体に行き渡る。今問題としている様な開放境界の場合、現在の所不完全なスキームしか見いだされていない為、この楕円形を用いるのは適当と思われない。後者の場合は、領域内の特に注目している場所に開放境界の不完全性の影響が現れる前に、計算を終了させるという工夫の余地が残されている。従って特にここでは後者に注目し、丸山・鹿島 (1985) の提案による基礎方程式から出発する。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\gamma M) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma N)\right\}, \quad \frac{\partial M}{\partial t} + c^2\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + c^2\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \qquad (6)$$

ここで　c；波速　$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right)$　h；水深

あるいは(6)からM、Nを消去すると下式(7)となり、一変数についての双曲形方程式に帰着する。いずれを選ぶかは解こうとする問題によるであろうが、後で述べる開放境界スキームに影響する。

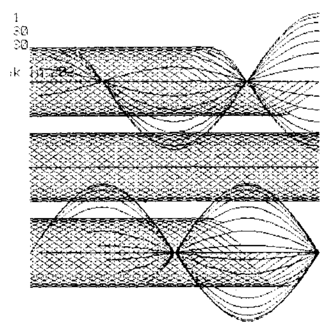
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma}\nabla\cdot(\gamma c^2 \nabla \zeta) \qquad (7)$$

4．瞬時重ね合わせ法

まえがきで述べたようにこの方法では、次の時間ステップでの計算の際開放境界上あるいは一つ内側の格子点で二つの反射条件のもとで得られた結果を重ね合わせ通過波のものとする。このとき、(6)と(7)のいずれを選ぶか、あるいは、2節で述べた2種の境界条件を境界上で与えるか境界をはさんだ対称性で与えるか等により多くの方法が考えられそうである。

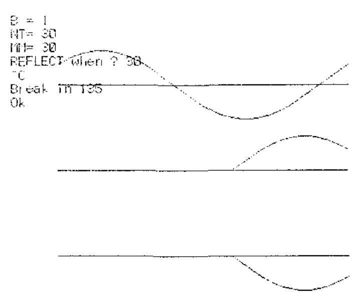
各々の方法を吟味する前に完全重ね合わせ法の計算例を示す。図2は簡単のため底面を水平床、波は境界に直角入射とした時のもので、(7)式を用い反射条件は1、2とも右端で境界をはさんだ対称性として与えた。図中(a)は反射条件1によるもの(c)は反射条件2によるもの(b)は(a)と(c)を重ね合わせたもので、反射波は完全に消えている。なおクーラン数$C\Delta t/\Delta X=1$としている。図3はクーラン数0.8の場合でやはり反射波は完全に消えている。

次に瞬時重ね合わせ法について考察する。この方法の最大の問題は、ある時点まで通過波としての正しい値が求まっていたとしても、次の瞬間突然1と2の反射条件を用いるという点にある。イメージ的には水路を進行している波の途中に突然反射板を投入する感じである。従ってその時の波の位相によっては必ずしも逆位相の反射波が発生しないことにある。図4～6はそのことを示す例で、図中(a)は図示してある倍の長さに計算領域を設けておき波を進行させている。(b)は図中の右端に突然反射条件1を適用させた場合のそ

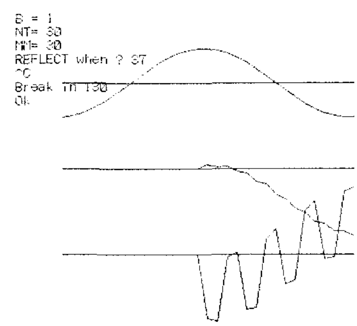


図－2　完全重ね合わせ法

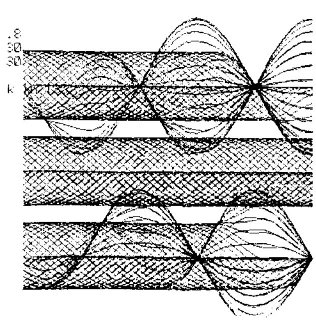
$C\Delta t/\Delta x = 1$



図－4　瞬時反射条件

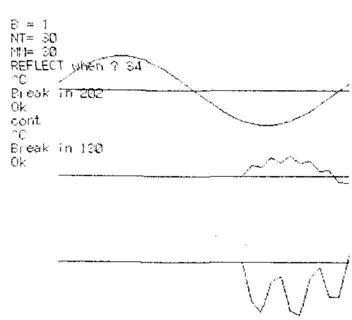


図－6　瞬時反射条件

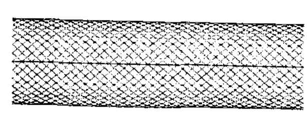


図－3　完全重ね合わせ法

$C\Delta t/\Delta x = 0.8$

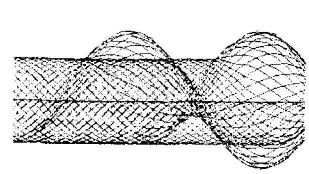


図－5　瞬時反射条件



図－7　瞬時重ね合わせ法

$C\Delta t/\Delta x = 1$



図－8　瞬時重ね合わせ法

$C\Delta t/\Delta x = 0.9$

の後の反射波を表示し、(c)は反射条件2を適用した場合である。図4は通過波の水位が境界で零となったときから反射条件を適用した場合であり、この時は2種類の反射波は完全に逆位相となっている。図5はさらに$\pi/4$だけ経過したあとから適用した場合で、図6は$\pi/2$後からの場合である。共に2種類の反射波は対称性を失っている。しかし詳細に見ると適用を始めてから3時点後及び4時点後の値は対称性を持っているように見える。このことを確かめるため境界近傍にいくつかの別の計算領域を用意しておきその中で2種の反射条件を適用させ常に3時点さか登って境界上の値を重ね合わせる方法を用いたのが図7である。この場合確かに反射波は消え通過波だけとなっている。しかしこれはクーラン数が1の場合であり、図8はクーラン数が0.9の場合で、無視し得ない反射波が残っている。従ってたとえクーラン数を1として計算したとしても斜め入射の場合はやはり無視し得ない反射波が残ると考えられる。

今までの議論は(7)を用いた場合であったが(6)を用いたリープフロッグ法でも瞬時重ね合わせ法が持つこの基礎的な問題点はなんら解消されることはない。従って、瞬時重ね合わせ法では良好な開放境界スキームの開発の可能性は少ないと考えられる。

5．完全重ね合わせ法

ここでは完全重ね合わせ法について若干の考察を試みる。始めに第1節で述べた複数個の開放境界がある場合を考える。今、基礎方程式として(6)あるいは(7)を用いるとし、反射条件も第2節で述べた方法で与えるとするなら、どの方法でも、方程式も境界条件も線形である。従って複数個の開放境界について各々に2面づつの計算領域を設ける必要はなく全体で2面で良い。

次に平面2次元（開放境界に対し斜め入射）の場合の問題点を考える。これは長波に対する瞬時重ね合わせ法でも見られたことであるが、波が開放境界に平行に進行する場合見かけの反射率が非常に大きくなることである。このことは次のように説明し得る。2節で述べた反射条件1の場合Mの対称性の条件を除き他の3つの条件は全て波が境界に平行に進行した場合の性質そのものであり、そこから反射は起こらない。又、Mの対称性の条件を用いても平行入射の場合は$M=0$であるからやはり反射は起きない。それに対し反射条件2の場合はMの対称性の条件以外は全て平行に進行する波の性質とは異なる条件であり、反射が起こる。特に反射条件2は境界上で水位が零として与えることが多いため2種の反射条件の重ね合わせによっては反射波を消すことが出来ない。

従って、これまでの考察から完全重ね合わせ法として可能性があるのは少なくとも反射条件2に対してはMの対称性を用いるものだけと考えられる。

6．あとがき

前節までで瞬時重ね合わせ法と完全重ね合わせ法に関する種々の問題点を考察してきた。その結果瞬時重ね合わせ法ではあまり成功の可能性はないこと、完全重ね合わせ法では反射条件2に対しMの対称性を用いる方法だけに可能性が残されている。今後は具体的なスキームを考え検討するつもりである。

参考文献

Hamanaka K. and Furuya A. 1990 : Effectiveness of open boundary scheme for long waves , Memo of the Faculty of Engg. , Hokkaido Univ., Vol.18 , No.1 pp.17～27

久連山・浜中 1991 : 日野の重ね合わせの原理による開放境界スキーム , 第46回土木学会年講 , 第II部門, pp.458～459

丸山・鹿島 1985 : 砕波減衰を考慮した砕波帯内外の波浪場計算法の提案とその適用 , 電力中央研究所報告 , pp.1～41