

II-77

円柱をよぎる振動流の数値解法

北海道大学工学部 学生員 勝 岡 洋 一
 北海道大学工学部 正 員 浜 中 建一郎
 北見工業大学工学部 正 員 佐 藤 幸 雄

1. はじめに

最近、海中のパイプライン構造物が、輸送システムとして提案されてきている。それらには幾つかのタイプがあるが、ここでは水の浮力によって持ち上げられた水平方向に伸びる円柱が、係留索によって海底につながれている場合を考える。波の動きの影響によって、その係留索に働く力を判定する為には、その円柱をとりまく流れを解析する必要がある。円柱が底面及び水面から適当な距離にある時、周囲の流れは水平方向のみの振動流と仮定できる。剥離がおこらない場合は、流れを解析的な方法で解くことができるが、周囲の流れの振幅が大きくなると、半周期毎に剥離がおこる為、流れを解析的な方法で解くことは困難である。ここでは、剥離を伴う円柱の回りの振動流を Hamanaka and Sato (1991) と同様の手法を用いて 数値的に解析する。渦度方程式及び流れ関数に対するポアソン方程式を基礎方程式として、円柱の表面においての流速=0を条件として与える。また、円柱から十分に離れた位置では、振動流の性質から渦度は無視できるものとし、そこでの流れを水平方向のみの振動流とする。今、波が円柱に対して直角に進行する場合、円柱の長さ方向に対して流れは一様であると考えられる。そこで、流れを断面2次元で考える。ここでは一つの軸が円柱の表面に沿うような円筒座標系に等角写像で変換する。また、渦度と流れ関数を回転方向の軸に沿って Fourier級数に展開し、基礎方程式の空間2次元の偏微分の問題を、1次元の偏微分のものに帰着させる。さらに、時間微分に関して前進差分を、残った空間1次元の微分に関して中央差分をとり数値的に解析する。上記の方法によって計算した結果、剥離は半周期ごとにみられ、また剥離によって形成された渦は次の半周期には表面から離れることがわかった。

2. 基礎方程式と差分化

基礎方程式としてNavier-Stokesの式から出発する。今、流れを垂直2次元流としXを水平軸、Yを垂直方向軸とし、 u, v を各 x, y 方向の流速とすると、流れ関数 ϕ と、渦度 ω は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (2)$$

と表される。

この(X, Y)平面で、原点に中心を持ち、Z方向に伸びる円柱を考えた時、円柱の半径を R_0 として、そのまわりにある振動流を考える。流れの境界条件を有次元量で表す為、全変量に"'"を付して表すと

$$(i) \quad R' = R_0' \text{ の時} \quad u' = v' = 0 \quad (3)$$

$$(ii) \quad R' = \infty \text{ の時} \quad v' = 0, \quad u' = \sigma' A' \cos \sigma' t', \quad \omega' = 0 \quad (4)$$

次に全ての変量を $R0', \sigma'$ を用いて無次元化すると

$$R = \frac{R'}{R0'}, \quad t = \sigma' t', \quad A = \sigma' A', \quad u = \frac{1}{\sigma' R0'} u', \quad v = \frac{1}{\sigma' R0'} v'$$

$$\phi = \frac{1}{\sigma' (R0')^2} \phi', \quad \omega = \frac{1}{\sigma'} \omega', \quad \nu = \frac{1}{\sigma' (R0')^2} \nu'$$

となり (3), (4) 式は

$$(i) \quad R = 1 \quad \text{で} \quad \phi = u = v = 0 \quad (5)$$

$$(ii) \quad R = \infty \quad \text{で} \quad v = 0, \quad u = A \cos t, \quad \omega = 0 \quad (6)$$

次に、以下の様な等角写像を用いた座標変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} x &= e^r \cos \theta \\ y &= e^r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (7)$$

ここで、 $R=0$ で θ 軸が円柱の表面を表す。この (r, θ) 平面に基礎方程式を変換すると

$$\left. \begin{aligned} J \omega_t + (\omega_r \phi_\theta - \phi_r \omega_\theta) - \nu (\omega_{rr} + \omega_{\theta\theta}) &= 0 \\ J \omega_t &= -(\phi_{rr} + \phi_{\theta\theta}) \\ J &= e^{2r} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また境界条件は

$$(i) \quad r = 0 \quad \text{で} \quad \phi_r = \phi_\theta = 0 \quad (9)$$

$$(ii) \quad r = \infty \quad \text{で} \quad \phi_r = \phi_x \frac{\partial x}{\partial r} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial r} = A e^r (\sin t) \sin \theta \quad (10)$$

このとき円柱の表面近傍では、流速は急激に変化する為、表面近傍での差分メッシュを細かくする必要がある。

ここでは

$$r = r_T \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (11)$$

で変換されると ζ 軸で等分割に差分化する。ただし、 $b > 1$ 。この変換では $0 \leq r \leq r_T$ が $0 \leq \zeta \leq 1$ に対応し、 b の値が大きいが方が境界近傍を細かく分割する。(11) 式から

$$\frac{d\zeta}{dr} = \frac{e^b - 1}{b r_T} e^{-b\zeta} \equiv \zeta_1, \quad \frac{d^2\zeta}{dr^2} = -b \zeta_1^2 \equiv \zeta_2$$

とする。

ϕ と ω を θ 軸にそって Fourier 級数に展開すると、(8) 式で表される基礎方程式は t と r 上の偏微分方程式に帰着する。これらの方程式を差分化すると、流れ関数は Gauss の消去法により数値的に解くことができる。流れ関数と渦度を θ 軸に沿って Fourier 級数に展開すると

$$\phi = \sum_m f_m e^{im\theta} \quad , \quad \omega = \sum_m g_m e^{im\theta} \quad (12)$$

また

$$\phi_\theta = \phi^{(im)} = \sum_m (im) f_m e^{im\theta} \quad (13)$$

として (8) 式を表すと

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= J^{-1} \zeta_1 \left(\omega^{(im)} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} - \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \phi^{(im)} \right) \\ &\quad + J^{-1} \nu \left(-\omega^{(m^2)} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) \\ -Jg_m &= -m^2 f_m + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial f_m}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また流れ関数に対する境界条件は

$$(i) \quad r = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{で} \quad f_m = 0, \quad \frac{\partial f_m}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

$$(ii) \quad r = r_T, \quad \zeta = 1 \quad \text{で} \quad (10) \text{ 式 及び } (12) \text{ 式より } f_1 \text{ の } \sin \theta \text{ 成分について}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = A e^r \sin t, \quad \frac{\partial f_m}{\partial r} = 0 \quad (m \neq 1), \quad g_m = 0 \quad (16)$$

さらに渦度方程式に関する境界条件は

$$r = r_T \quad \text{で} \quad \omega = 0 \quad (17)$$

また円柱表面では ϕ を $\zeta = 0$ の回りで Taylor 展開して

$$\phi(\Delta \zeta) = \phi + \Delta \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2}$$

ただし $\zeta = 0$ で $\phi = \phi_\zeta = 0$, さらに

$$\begin{aligned} \omega &= -J^{-1}(\phi_{rr} + \phi_{\theta\theta}) = -J^{-1} \left(\zeta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right) \\ &= -J^{-1} \zeta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \\ &= -J^{-1} \zeta_2 \left(-\frac{2\phi}{\Delta \zeta^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

次に (14) 式で $\Delta \zeta$ に関して中央差分、 Δt に関して前進差分をとり、上の境界条件を用いて数値的に解くことができる。

3. 計算例

表-1のような条件のもとで計算を行い、図-1のような計算メッシュの各点で、流れ関数 ϕ と渦度 ω の値を振動流の1周期分($N_T=2\pi/\Delta t$ 個)だけ求め、 $N_T \times 1/8=400$ 毎に図に描いた。図-2, 3, 4は、渦度 ω のContour、図-5は流れ関数のContourである。図中の dL はContour-Lineの間隔で $\Delta\omega$ と $\Delta\phi$ の増分を表している。渦度 ω は反時計回りを正とし、Contour-Lineは太線で正の値を、細線で負の値を描いている。表-1のようにRUN-3では振幅 A をRUN-2の1/2にし、RUN-4では粘性係数 ν をRUN-2の2倍とした。図-2~4を比較するとRUN-3, RUN-4ではRUN-2に比べ流れが緩やかで、渦もそれほど顕著ではない事が確認できる。また図-4の渦度から予測される渦塊が図-5の流線に対応している事がわかる。

RUN	ν	A	b	r_T	M	N	N_T	周期	分割	CPU
2	.1	2	1	2.7	64	40	3200	1	8	2'04
3	.1	1	1	2.7	64	40	3200	1	8	****
4	.2	2	1	2.7	64	40	3200	1	8	2'04

表-1 ; Computational condition

$M = 64 \quad , \quad N = 40$
 $r_T = 2.7 \quad , \quad b = 1$

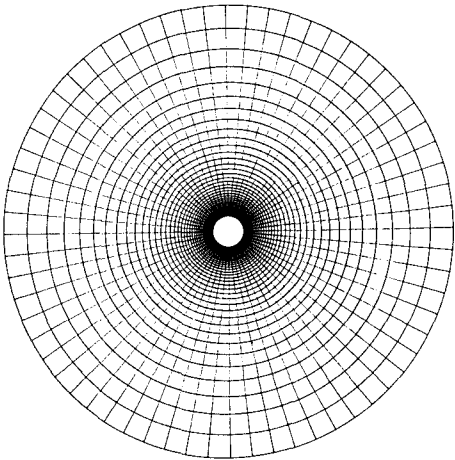


図-1 ; 計算メッシュ

DS NAME = F:G2.DAT
dL = 2

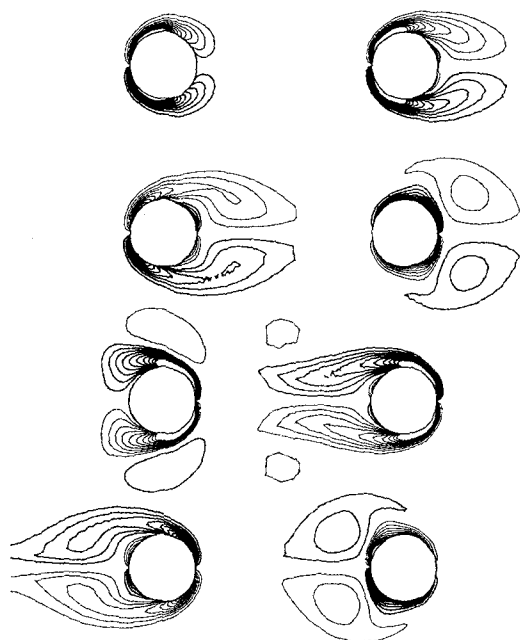


図-2 ; 渦度 ω (RUN-2) Contour

DS NAME = A:\RIPPLE\DATA\G3.DAT
dL = 2

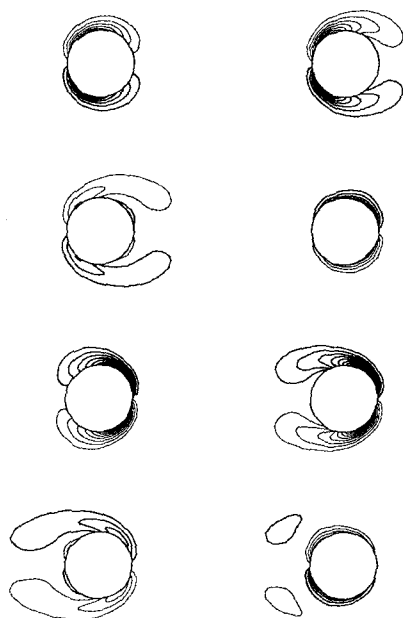


図-3 ; 渦度 ω (RUN-3) Contour

DS NAME = A:\RIPPLE\DATA\G4.DAT
dL = 2

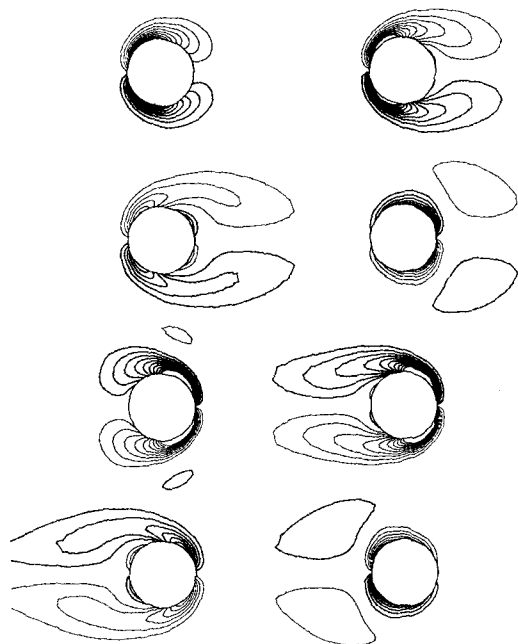


図-4 ; 渦度 ω (RUN-4) Contour

DS NAME = A:\RIPPLE\DATA\F4.DAT
dL = .25

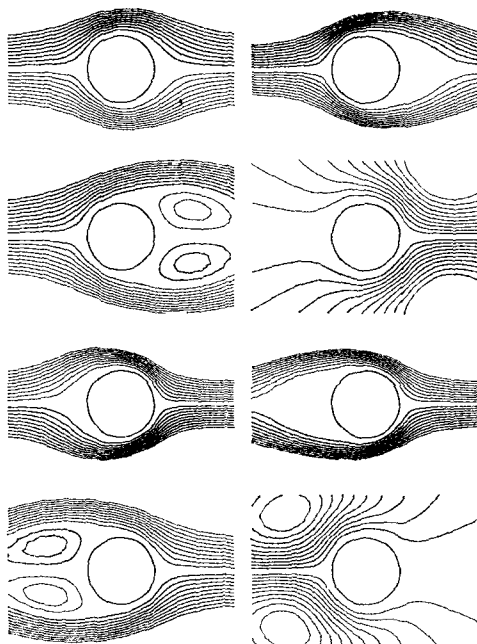


図-5 ; 流れ関数 ϕ (RUN-4) Contour

4. 考察

このような非線形方程式の数値解法は安定性の予測が難しく、計算条件によっては途中で数値が不安定な状態になる。従って、まず第一周期の様子をみてから次周期へ移る必要がある。今回の計算では RUN-2 で多少の不安定をおこして、計算条件の検討が必要であるが、RUN-3・RUN-4 では次周期への期待がもてた。最終的には定常状態になった時の渦の様子や流れの状態が解析できそうである。また Navier-stokes の式の関係から、ここで求めた流れ関数 ψ を用いて、円柱に作用する圧力及びせん断力の解析も可能である。この解法はまた、水面や底の部分における影響（垂直方向の流速 etc.）や、円柱の部分的反射を考慮する場合にも、ポテンシャル理論の波動解を境界条件として与えることによって利用できる。

今回は外側の境界条件として、完全水平振動流を与えたが、波動による水粒子の垂直運動が無視し得る場合は、外側境界条件として、ポテンシャル理論による波動解による流速を与えれば良い。また、円柱で波が部分反射をする場合は、あらかじめポテンシャル流れとして、部分的反射波動場を解析的に求めておき、それによる流速を与えればよい。底面の影響が無視出来ない場合は、このままでは適用出来ないが、円柱と底面を共に表す、適当な等角写像が見つければ出来そうである。

【参考文献】

Hamanaka K. and Sato Y. 1991 ; Separation of Oscillating Flow over a Wavy Bed. Proc. of Int.-Meeting on Hydraulic Transients with Water Column Separation , pp.156-167.