

II-75

移動座標系を用いた波動場の数値解析

北海道大学工学部	学生員	金 井 正 徳
北海道大学工学部	正 員	浜 中 建一郎
北見工業大学工学部	正 員	佐 藤 幸 雄

1. はじめに

波動運動に伴う質量輸送、特に底面近傍のそれは 漂砂現象に密接なかわりを持つ。この問題に関して、底面境界層内の2次の非線形性を考慮した Longuet-Higgins (1958) の解が良く知られており、層流解と共に乱流境界層を考慮した解も示されている。そのうち、乱流解は、局所平均された水塊が波動運動に伴って移動する間、その渦度粘性係数を一定値に保つという仮定の基に解かれ、境界層外縁での平均流や質量輸送速度は渦粘性係数の値や分布に依存しない という結論を得ている。しかしながら、現在のところこの仮定の妥当性を示す明確な理由は理論的にも、実験的にも得られていない。

一方、砂漣等の底面粗度上の剝離を伴う境界層内流れに関しては数値的手法により解析されるようになってきた (Hamanaka and Sato, 1991)。この方法によれば完全乱流に対しては当面無理としても準乱流状態に対しては渦粘性係数の時間的変化を求めることが出来る。しかしながら、この方法では境界層外縁での流速は境界条件として与えなければならず、Longuet-Higgins の結論を確かめることは出来ない。そのためには Hamanaka and Sato の方法で得られた渦粘性係数を用いて底面境界層を含んだ波動場全体をもう一度解析する必要がある。そのとき、粗度上の乱れの渦粘性係数を、粗度の代表長にわたって水平方向に平均して求めると、境界層は波と同じ波長 及び周期を持つ周期運動となる。従って波速で移動する座標系から見た場合 底面境界層も含めて定常流となる。

このことから、本研究では、波動場内における底面境界層近傍の流れを調べる方法として移動座標系を用いた数値解析の手法を開発し、いくつかの計算例を示すことを目的とする。

2. 基礎方程式と境界条件

扱う波については、底面から十分離れたところでは微小振幅波の流速分布が成り立つとして以下とする。

$$\eta = a \cos(kx - \sigma t), \quad \phi = \frac{a\sigma}{k} \frac{\cosh ky}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

$y = y_t$ において

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{a\sigma}{\sinh kh} \frac{\cosh ky}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t), \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{a\sigma}{\sinh kh} \frac{\sinh ky}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

$$\omega = 0$$

ここに η : 波の波形, ϕ : 波の速度ポテンシャル, k : 波の波数, σ : 波の周波数, h : 水深, y_t : $0 \leq t \leq h$ を満たす任意の距離, u : x 方向流速, v : y 方向流速, ω : 渦度, ϕ : 流れ関数

A numerical analysis of waves on a moving coordinate system
by Masanori Kanai, Kenichiro Hamanaka and Yukio sato

次に パラメーターを少なくするために、長さの単位を k で、時間の単位を σ で 無次元化する。ここに有次元量には $\sim$ を上につけて無次元量と区別する。

$$\begin{aligned} x &= \tilde{k} \tilde{x}, \quad y = \tilde{k} \tilde{y}, \quad h = \tilde{k} \tilde{h}, \quad t = \tilde{\sigma} \tilde{t}, \quad \phi = (\tilde{k}^2 / \tilde{\sigma}) \tilde{\phi}, \quad \omega = \tilde{\omega} / \tilde{\sigma}, \quad \nu = (\tilde{k}^2 / \tilde{\sigma}) \tilde{\nu}, \\ u &= (\tilde{k} / \tilde{\sigma}) \tilde{u}, \quad v = (\tilde{k} / \tilde{\sigma}) \tilde{v}, \quad \phi = (\tilde{k}^2 / \tilde{\sigma}) \tilde{\phi} \end{aligned}$$

基礎方程式として渦度方程式と流れ関数に対するポアソン方程式から出発する。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (\text{渦度方程式}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = - \omega \quad (\text{流れ関数に対するポアソン方程式}) \quad (2)$$

境界条件は以下となる。

$$y = 0 \quad \text{で} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad v = - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

また $y = y_t$ においての x 方向, y 方向それぞれの流速, 及び渦度は以下となる。

$$u = a \frac{\cosh y}{\sinh h} \cos(x-t), \quad v = a \frac{\sinh y}{\sinh h} \sin(x-t) \quad (4)$$

$$\omega = 0 \quad (5)$$

次に 本論文では、扱う波と同じ速度で移動しながらでの水の流れの解析を行う。よって扱う波が静止したように見える座標、つまり (x, t) 座標から (ξ, τ) 座標 $[\xi = x-t, \tau = t]$ に座標変換を行う。

今、 (ξ, τ) 座標上の ξ 方向速度を U とする。

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{\partial x}{\partial t} - 1 = u - 1$$

また (ξ, τ) 座標上の流れ関数を Ψ とすると以下となる。

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{ここに} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - 1 \quad \text{または} \quad \Psi = \phi - y$$

一般に

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi}$$

(ξ, τ) 座標上の渦度を W とすると以下となる。

$$W = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \omega$$

よって (1) 式は以下のように変換される。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = - u \frac{\partial \omega}{\partial x} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad \text{より} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = -(U + 1) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - v \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (7)$$

$$\text{または} \quad \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

また (2) 式は以下ようになる。

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (9)$$

この結果を利用して Ψ を ϕ で, W を ω で置き換えると (3) 式は以下に

$$y = 0 \quad \text{で} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -1, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (10)$$

そして (4), (5) 式は以下となる。

$$y = y_t \text{で}$$

$$u = a \frac{\cosh y}{\sinh h} \cos \xi - 1, \quad v = a \frac{\sinh y}{\sinh h} \sin \xi \quad (11)$$

$$\omega = 0 \quad (12)$$

次に流れ関数と渦度を ξ 軸にそって フーリエ級数に展開する。

$$\phi = \sum f_m e^{im\xi}, \quad \omega = \sum g_m e^{im\xi}$$

$$\text{上式より} \quad \phi_\xi = \sum im f_m e^{im\xi}, \quad \phi_{\xi\xi} = -\sum m^2 f_m e^{im\xi}, \quad \omega_\xi = \sum im g_m e^{im\xi}, \quad \omega_{\xi\xi} = -\sum m^2 g_m e^{im\xi}$$

すると渦度方程式と、流れ関数に対するポアソン方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \omega_\xi + \phi_\xi \frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu (\omega_{\xi\xi} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 f_m}{\partial y^2} - m^2 f_m = -g_m \quad (14)$$

つぎに底面境界近傍で流速が急速に変化するため、底面近傍でメッシュが細くなるよう以下の変換を行う。

$$y = y_t \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad \text{ただし } b > 1 \text{ で } 0 \leq y \leq y_t \text{ が } 0 \leq \zeta \leq 1 \text{ に対応} \quad (15)$$

b の値が大きい方が境界付近を細かく分割する

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad \text{ここに } \frac{\partial \zeta}{\partial y} \text{ を } \zeta_1, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \text{ を } \zeta_2 \text{ とする。}$$

よって (13), (14) 式は以下となる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \omega_\xi - \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \omega_\xi + \zeta_1 \phi_\xi \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + \nu (\omega_{\xi\xi} + \zeta_1^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}) \quad (16)$$

$$\zeta_1^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial \zeta^2} + \zeta_2 \frac{\partial f_m}{\partial \zeta} - m^2 f_m = -g_m \quad (17)$$

ここに

$$\zeta_1 = \frac{e^b - 1}{y_t b e^{b\zeta}}, \quad \zeta_2 = -b\zeta_1^2$$

さらに電子計算機による解析を行うために、時間微分は前進差分で、空間微分は中央差分で整理する。

$\xi = m \Delta \xi$, $\zeta = n \Delta \zeta$, $\tau = j \Delta \tau$ として渦度方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \omega_{m,n}^{j+1} = & \omega_{m,n}^j + \zeta_1 \Delta \tau \left\{ -(\omega_\xi)_{m,n}^j \frac{\phi_{m,n+1}^j - \phi_{m,n-1}^j}{2 \Delta \zeta} + (\phi_\xi)_{m,n}^j \frac{\omega_{m+1}^j - \omega_{m,n-1}^j}{2 \Delta \zeta} \right\} \\ & + \nu \Delta \tau \left\{ (\omega_{\xi\xi})_{m,n}^j + \left(\frac{\zeta_1^2}{\Delta \zeta^2} + \frac{\zeta_2}{2 \Delta \zeta} \right) \omega_{m,n+1}^j - \frac{2 \zeta_1^2}{\Delta \zeta^2} \omega_{m,n}^j + \left(\frac{\zeta_1^2}{\Delta \zeta^2} - \frac{\zeta_2}{2 \Delta \zeta} \right) \omega_{m,n-1}^j \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

m 番目の波数上で、流れ関数に対するポアソン方程式は以下となる。

$$\zeta_1^2 \frac{f_{m,n+1} - 2f_{m,n} + f_{m,n-1}}{\Delta \zeta^2} + \zeta_2 \frac{f_{m,n+1} - f_{m,n-1}}{2\Delta \zeta} - m^2 f_{m,n} = -g_{m,n} \quad (19)$$

$\zeta_2 = -b\zeta_1^2$ を代入して整理すると以下となる。

$$\left(1 - \frac{b\Delta \zeta}{2}\right) f_{m,n+1} - \left(2 + \frac{\Delta \zeta^2}{\zeta_1^2}\right) f_{m,n} + \left(1 + \frac{b\Delta \zeta}{2}\right) f_{m,n-1} = -\frac{\Delta \zeta^2}{\zeta_1^2} g_{m,n} \quad (20)$$

最後に境界条件について以下に示す。

渦度に対して $\zeta = 1$ ($y = y_t$) のとき

$$\omega = 0 \quad (21)$$

底面では Taylor 展開を利用して以下となる。

$$\phi(\Delta \zeta) = \phi + \Delta \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} = \Delta \zeta \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \Delta \zeta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} \quad (\text{なぜなら } \phi_{\zeta=0} = 0) \quad (22)$$

一方、

$$\omega = -\zeta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \zeta_2 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \quad \text{これを整理すると} \quad \omega = -\frac{2\zeta_1^2 (\phi_{\zeta\zeta} + \frac{\Delta \zeta}{\zeta_1})}{\Delta \zeta^2} - b\zeta_1 \quad (23)$$

$$\text{底面上で} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = -1 \quad \therefore \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\zeta_1} \quad (24)$$

流れ関数に対して、 $\zeta = 0$ で $v = 0$ より

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = -\sum i m f_m e^{i m \xi} = 0 \quad \therefore f_m = 0 \quad (25)$$

$\zeta = 1$ ($y = y_t$) で

$$\phi = \frac{1}{2} f_0 + \sum f_m \cos m\xi + \sum f'_m \sin m\xi \quad (26)$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial y} + \sum \frac{\partial f_m}{\partial y} \cos m\xi + \sum \frac{\partial f'_m}{\partial y} \sin m\xi = a \frac{\cosh y_t}{\sinh h} \cos \xi - 1 \quad (27)$$

従って

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} = \zeta_1 \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} = -2 \quad (28)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \zeta_1 \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} = a \frac{\cosh y_t}{\sinh h} \quad (29)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \sum m f_m \sin m\xi - \sum m f'_m \cos m\xi = a \frac{\sinh y_t}{\sinh h} \sin \xi \quad (30)$$

従って $f_1 = a \frac{\sinh y_t}{\sinh h}$ これは (29) と同じであるので不必要。

計算結果

図1 は 式 (15) の y と ξ の関係を示す。用いたパラメータは $b = 3$ である。
表1 は今回の計算条件を示す。一例のみであるが、解析方法の妥当性を調べることを目的に、実験的規模の非常におだやかな波の条件をあたえた。

表 1 計算例条件一覧

M	N	NT	NNT	ET
16	32	3200	3200	0.5
a	b	ν		h
0.1	3	0.27×10^{-4}		2

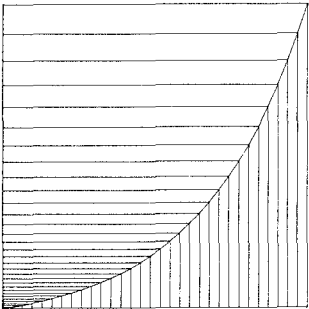


図 1 座 標 変 換

図2 は 静止状態から始めた渦度の等高線図である。横軸は ξ で一波長分、縦軸は底面近傍の様子がよく分かる様に η 軸 で表した。太線は正の渦度（反時計回り）、細線は負の渦度（時計回り）で静止座標系で見れば 波は正方向（左から右）に進行している。図中 (a) から (h) は波の一周期の時間の $1/8$ ずつ経過時のものである。各図 共 波の位相は両端が波の山、中央が波の谷に相当する。
これによれば ほぼ半周期分の時間経過で定常状態に達している。

図3 は 図2 で与えた波と同じ条件の線形解による渦度を示す。図2 の数値計算は非線形性をきっちり考慮しているため 両図は必ずしも一致する必要はないが、与えた波の波高が非常に小さいためよく一致している。

図4 は 初期値として線形解を与えた場合で当然ではあるが 最初からほぼ定常状態となっている。

図5 は 図4 の場合の流れ関数で、図6 は 図3 と同じ線形解によるものであり、渦度の場合と同様両者は良く一致している。

あとがき

前書きで述べたように 本研究の目的はより現実に近い渦粘性係数を与えた時の境界層外縁での平均流や質量輸送を求めることにあったが、今回はそのための解法の一つとして移動座標系による波動場の数値解法を提案した。又 その解法の妥当性を調べるため 一樣な粘性係数のもとで計算を行い、線形波動解と比較し良好な結果を得た。今後 適当な渦粘性係数を与え同様の計算を行うとともに、波動場底面近傍での流れの不安定性等を調べるつもりである。

参 考 文 献

Longuet-Higgins M.S. 1958 : The mekanics of the boundary-layer near the bottom in a progressive wave, Proc. of I.C.E.E., pp. 184-193
Hamanaka K. and Sato Y. 1991 : Separation of oscillating flow over a wave bed , Proc. of Int. Meeting on Hydraulic Transients with Water Column Separation, pp. 156-167

DS NAME = F:NG1.DAT
dL = .5

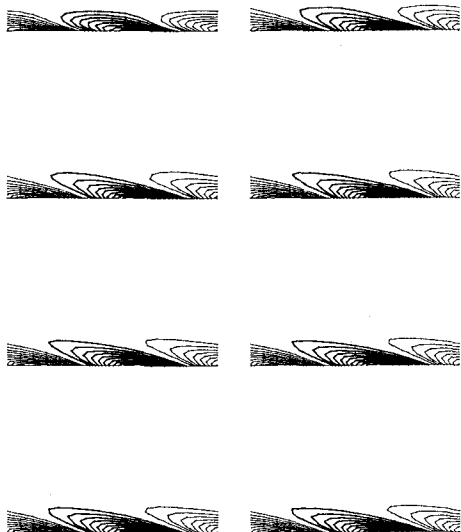


図 2 静止状態から始めた渦度

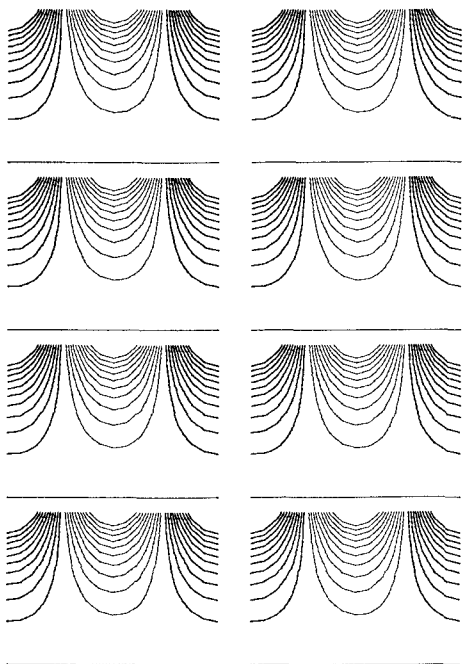


図 5 線形解から始めた流れ関数

DS NAME = F:TG1.DAT
dL = .5

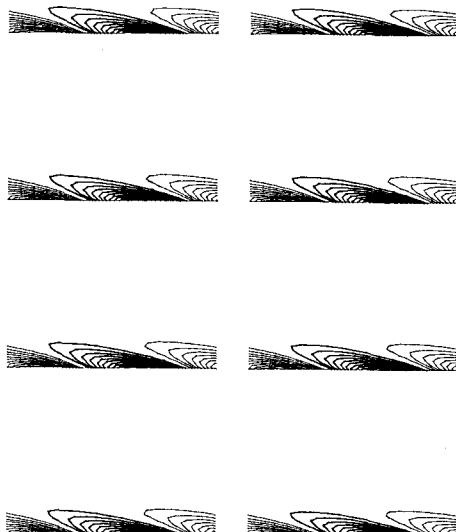


図 4 線形解から始めた渦度

DS NAME = F:TG1.DAT
dL = .5



図 3 線形解による渦度

DS NAME = F:TF1.DAT
dL = .001

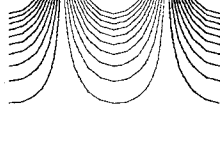


図 6 線形解による流れ関数