

II-73

規則波による流速分布の適用限界について (4)

北見工業大学

正会員 鯉目 淑範

北見工業大学

正会員 佐藤 幸雄

1. はじめに

著者らはここ数年来、波の水平方向最大流速を測定し、その水深方向の分布形状を求め、微小振幅波・有限振幅波理論などによる流速分布式との比較を行ってきた。その中で、波による流速の水平方向成分の適用限界が、波形の場合の適用限界と差異が生じている可能性があること、また、微小振幅波の流速分布式はかなり広範囲に適用出来る可能性があることを指摘してきた。また、分布形状の比較する際の定量的な分類方法なども提案してきた。しかし、波高 H の小さい波の場合や、水深 h の小さい波の場合は、波形・流速ともに測定が困難なこともあり、あまり実験を行っていなかった。本実験では、主に波高の小さい波の場合（波形による適用範囲では微小振幅波理論が適用可能とされる範囲の波）に関する実験を行い、実際に微小振幅波理論が適用可能かどうかの確認を行うとともに、岩垣・酒井が斜面上の碎波の流速場に適用してよい結果を得たとされる Dean の Stream Function Theory を実験値に適用し、若干の考察を加えることにする。

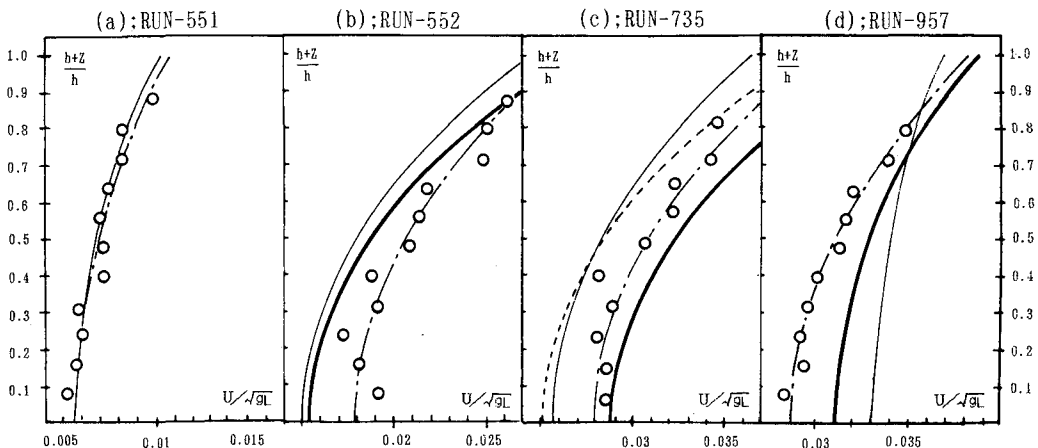
2. 実験波と流速分布

測定した流速の水平方向速度成分の最大値 U を $U/\sqrt{gL}$ で無次元化して水深方向の流速分布として図示すると、図-1(a),(b),(c),(d)となる。図中の○は電磁流速計による測定値、実線は微小振幅波理論値、点線は第3近似ストークス波の理論値である。また、破線は測定値を $U/\sqrt{gL}=A((h+z)/L)^2+B$ で近似させた場合の値である。さらに太い実線はDeanのStream Function Theoryによる計算値である。波形および波高による適用限界は種々

表-1. 実験波の諸元

実験番号	551	552	735	957
水深 h cm	25.0	25.0	30.0	25.0
周期 T sec.	1.001	1.001	1.486	1.993
波高 H cm	0.984	2.519	5.092	6.534
波長 L cm	133.11	129.50	206.42	340.60

図-1. 流速分布の状況



The applicability of wave theory for velocity distribution of water waves
by Yoshinori YONOME and Yukio SATOH

提案されているが、第2次近似ストークス波の2次波発生限界から考えた場合の微小振幅波理論の適用限界は $H/L \leq 8\pi^2/30$ (ただし $H/L < 0.00796$) である。今回の実験に使用した19波の内13波はこの領域の波である。この領域の波の諸元(波長 L , 波高 H , 水深 h , 周期 T)を、微小振幅波および第3近似ストークス波の流速分布式に用いた場合、両者の分布形状はほとんど同じようになる(図-1(a))。

測定値の流速分布も、定性的に見た場合、一部を除いて、微小振幅波の分布形状となっている。しかし、前報で提案した、速点 z における底面流速と比較した増分量を用いた底量的な分類方法は、この領域の波では底面流速が小さいために差異が大きくなり現れすぎる問題点がある。この領域の波については波形・流速ともに微小振幅波理論を適用することが可能と考えられる。

3. DeanのStream Function Theory

一様水深 h を一定の波速 $C=L/T$ (L :波長, T :周期)で変形せずに伝播する波を、(1)式のような流れ関数 ψ で表現する。この場合の座標系は、波速と同じ速度で運動する座標系 $x-z$ (x :波の進行方向の水平座標, z :静水面を原点とする鉛直上向き座標)を用いている。また、 $k=2\pi/L$ である。

$$\psi = \frac{L}{T} + \sum_{j=1}^N \sinh 2jk(h+Z) (X_{2j-1} \cos jkx + X_{2j} \sin jkx) \quad \text{----- (1)}$$

この ψ は、ラプラスの方程式を満たし、海底での境界条件、水面での運動学的条件を満たしている。

ここで、水面($Z=\eta$)では $\psi=\text{const.}=X_0$ となることから

$$\eta = \frac{T}{L} X_0 - \frac{T}{L} \sum_{j=1}^N \sinh 2jk(h+Z) (X_{2j-1} \cos jkx + X_{2j} \sin jkx) \quad \text{----- (2)}$$

波形の理論値を η_p 、測定値を η_m とし、1周期を I 個に分割し、 x_i 点の値をそれぞれ η_{pi} 、 η_{mi} とする。

$$E_2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\eta_{pi} - \eta_{mi})^2 \quad \text{----- (3)}$$

(3)式は η_p と η_m の不一致の程度を表現する。(3)式の E_2 を最小にする X_j ($j=0,1,2,\dots,N$)を決めると、波形の理論値 η_p を求めることが出来る。

水面での力学的条件から、水面での圧力 $p=0$ とすると、運動座標系では(4)式ようになる。

$$\eta + \{ (u - C)^2 + w^2 \} / 2g = Q \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 u, w はそれぞれ静止座標系からみた波の水粒子速度の x, z 成分であり、 Q はベルヌーイの定数である。このベルヌーイの定数 Q の1周期にわたる変動の程度を表現する量として次式のように E_1 を考える。

$$E_1 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (Q_i - \bar{Q})^2, \quad \bar{Q} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I Q_i \quad \text{----- (5)}$$

さらに(3)式、(5)式から、 $E_T = E_1 + E_2$ を定義し、(3)式の E_2 が最小となる X_j ($j=0,1,2,\dots,N$)を X_j' ($j=0,1,2,\dots,N$)だけ増加した場合を考え、Taylor展開を用いると E_T は近似的に次式で与えられる。

$$E_T = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left[\left\{ Q_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial Q_i}{\partial X_j} X_j' \right\} - \left\{ \bar{Q} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X_j} X_j' \right\} \right]^2 \\ + \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \left[\left\{ \eta_{pi} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta_{pi}}{\partial X_j} X_j' \right\} - \eta_{mi} \right]^2 \quad \text{----- (6)}$$

この E_T を最小にするための式 $\partial E_T / \partial X_j' = 0$ ($j=0,1,2,\dots,N$) は X_j' ($j=0,1,2,\dots,N$) に関して $N+1$ 個の連立方程式になる。この連立方程式を解いて、 X_j' が十分小さくなければ、 $X_j' + X_j$ を新たに X_j として再び同じ計算を繰り返す。

4. 計算結果

実際の計算にあたっては、水位変動の記録 (sampling time $ST=0.02\sim0.05\text{sec}$) から適当な一波を選び、波谷から波谷までを一周期 T とし、波峰から前後の波谷までの区間を各7等分し、波峰の点を含めて全体を15分割 ($I=15$) して、 x_i ($i=15$) における η_{mi} を求めた。また、 $N=10$ で、これは Stokes 波の第5近似解に対応する値となる。さらに、 E_T を最小にするための繰り返し計算は6回とした。

波形に関する計算結果を、図-2(a)~(d)に η_{mi} を○、 η_{pi} は各点を滑らかに結んだ形で太い実線で、微小振幅波の波形を細い実線、Stokes波の第3近似解の波形を破線で示している。

実験波形は周期 T が小さい場合や、周期 T が大きくても波高 H が小さい場合には、ほぼ微小振幅波の波形となっている (図-2(a)、(b))。また、図-2(c)のように、周期 $T=1.5\text{sec}$ の場合は波高 H が大きくなると、実験波形は第3近似Stokes波の波形に近い波形となっている。しかし、図-2(d)のように、周期 $T=2.0\text{sec}$ と長周期の場合には、波高 H が大きい場合は、波形はかなり歪んでいる。

波形の適用限界からみると、図-2(c)の波は第3近似Stokes波の適用範囲の波であり、図-2(d)の波は第3近似Stokes波の2次波発生限界を越えた領域の波である。

また、図-2(a)、(b)の波は前述の微小振幅波の適用限界は越えているが、第2近似Stokes波の2次波発生限界を越えない領域の波である。このように波形から見た場合、実験波は波形の適用限界に合った波として造波されていることが分かる。

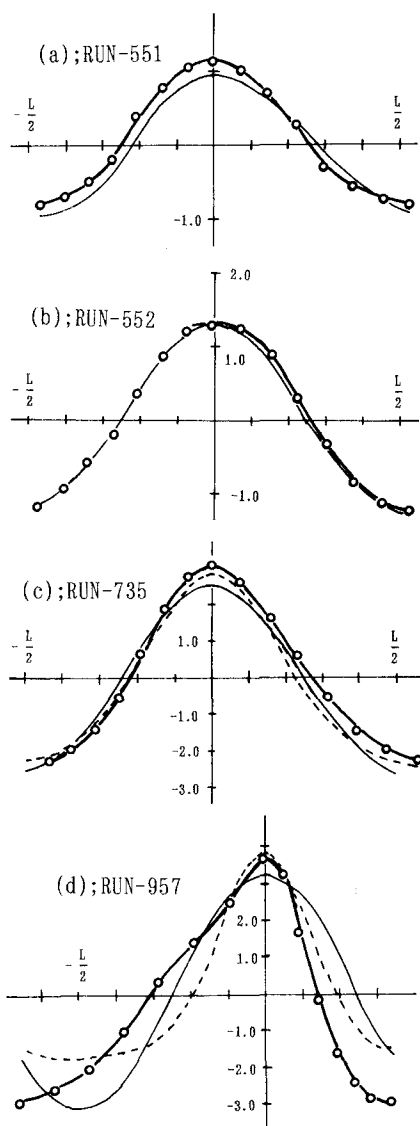
一方、DeanのStream Function Theory を適用した計算波形 η_p は、ほぼ実験波形 η_{mi} を結んだかのように表現されている。実際には $(\eta_{pi}-\eta_{mi})/\eta_{mi}$ の形で誤差を表すと、波峰の点で、最大0.012程度の差異が6回の繰り返し計算でも残っている。しかし、波形に関しては、本実験波の多くの場合、3回程度の繰り返し計算で、誤差が小さくなってしまい、値がほとんど変わらない状態になり、実験波形の測定誤差を考慮すると、計算値は実験値を十分に表現していると考えられる。

流速に関しては図-1(a)、(b)、(c)、(d)に太い実線で示しているが、波形からみた場合に微小振幅波理論が適用可能な領域にある実験波においては、図-1(a)のように微小振幅波による流速分布とほぼ重なった値で流速分布が計算されている。しかし、図-1(b)は波形からみると微小振幅波の波形を示しているが流速分布では微小振幅波と異なった分布形状を示している波の場合だが、計算値は微小振幅波理論による値よりは若干実験値に近い値をとっている。図-1(c)、(d)においても微小振幅波による値より実験値に近い値を示している。図-1(d)における第3近似Stokes波による値は図中に収まらないほどの大きな値となっている。

このように Dean の Stream Function Theory を用いて算出した流速値は、値としては実験値に近くなっている。しかし、分布形状を比較した場合には実験値の分布形状と差異が現れており、実験波の流速分布を十分に表現出来ているとは言えない。

実験波が周期波であることから○を考えると、式(4)にお

図-2. 実測波形 η_m と計算波形 η_p



ける第2項は $C^2/2g$ に近い値となることが予想できる。微小振幅波の場合の $C^2/2g$ を(8)式のような無次元量で表し、6回目の繰返し計算が終了した段階での $\bar{Q}/L$ との比較を図-3に示した。図-3においては、比水深 h/L が大きな箇處と、または小さな箇處において $\bar{Q}/L$ は(8)式より大きくなっている。これは波速 C が微小振幅波より大きい値となっているか、波形 η において波高中分面と静水面が一致せずに、SET-UPのような状態で+方向に大きくなっていることによると考えられる。そこで、波高中分面と静水面との距離 δ に関して実測値と第3近似のストークス波における波高中分点と静水面との距離 δ との比較を図-4に示したが、波形勾配 H/L が大きな場合は(7)式に近い値を示すが、波形勾配 H/L が小さな場合には測定値にバラツキが大きく、規則性が見られない。

ここで、第3近似のストークス波では波高中分点と静水面との距離 δ は、 $k=2\pi/L$ として(7)式で表される。また $C^2/2g$ は、微小振幅波の波長に関する式より(8)式のように表される。

$$\delta = \frac{\pi}{L} A^2 \cdot \coth(kh) \quad \text{ただし、} A = 0.5H - \frac{3}{128} \left\{ \frac{\pi}{L} \right\}^2 H^3 \cdot \frac{\{1+8\cosh^6(kh)\}}{\sinh^6(kh)} \quad (7)$$

で表される。また、微小振幅波の波長に関する式より $C^2/2g$ は以下のように表される。

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh) \quad , \quad C = \frac{L}{T} \quad \text{より} \quad \frac{C^2}{2g} = \frac{L}{4\pi} \tanh(kh) \quad (8)$$

5. おわりに

本論においては、Dean の Stream Function Theory を用いた波形・流速の計算値と実測値の比較を行ったが、実験波のほとんどが一領域に限られているために、十分な比較検討が行われていない。今後、実験波の領域を広げるとともに δ 、 $\bar{Q}$ に関してもさらに検討を深めて行きたい。

図-3. 平均ベルヌーイの定数 $\bar{Q}$ と $C^2/2g$ の比較

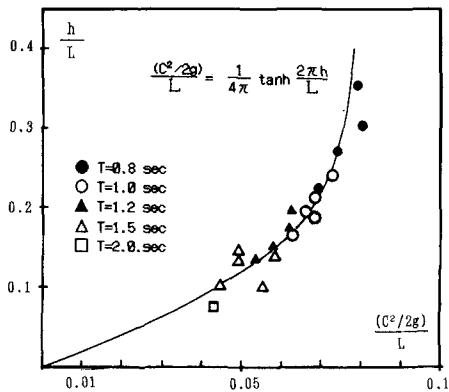
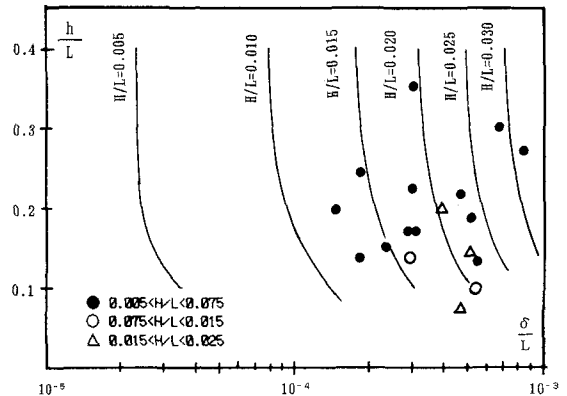


図-4. 波高中分点と静水面との距離 δ



参考文献

- 鯉目淑範・佐藤幸雄：規則波による流速分布の適用限界について(3)＝土木学会北海道支部論文報告集47号、1991年、PP289～292
- 鯉目淑範・佐藤幸雄：流速成分の適用限界に関する実験的研究＝土木学会第46回年次学術講演会概要集(Ⅱ)、1991年、PP944～945
- 岩垣雄一・酒井哲郎：Stream Function Theory による斜面上の碎波の水粒子速度の表現について＝第21回海岸工学講演会論文集、1974年、PP27～32