

II-50

等球粒子モデルを用いた
不飽和浸透流の微視的解析北見工業大学 正員 中尾隆志
北海道大学 正員 藤田睦博

1. まえがき

地下水の流れや雨水の浸透流はその特性を巨視的に取り扱った飽和・不飽和浸透理論により解析されてきた。しかし、近年環境問題が大きくクローズアップされ地下地盤内への汚水の侵入や農薬物質の土壌内の残留などが大きな社会問題となっており、これらの現象を調べようとすると現象を微視的に取り扱った解析が必要となる。他方、水文学の分野においても水質を用いた河川流出成分の分離や密度の異なる液体の侵入、拡散問題を取り扱う場合、やはり浸透現象を微視的に取り扱う必要がある。飽和・不飽和浸透理論については数多くの論文が出されており理論的には一応完成されたものとみなすことができる。一方、浸透流を微視的な立場から取り扱った研究は主として、化学工学や土壌学の分野で粒子間のリング水の効果に対し理論的な解析がなされている¹⁾が、その多くは毛管力が卓越したものとして静的な状態でリング水を取り扱っているだけで粒子間の流れまで取り扱っていない。本研究は土壌を構成する粒子が等しい径からなる球状の粒子を考え、土壌内の保水効果として土壌粒子接合部におけるサクシジョンによるリング水の保水を考え、粒子間の流れを球座標系表示によるナビエス・ストークス方程式を直接解くことにより、地下水の流れを定性的かつ定量的に取り扱うことを目的としており、最初に球面上の薄層流の1次元流れの基礎方程式を誘導し、次に土粒子接合部でのリング水の保水効果と浸透遅れについて考察を行ったものである。

2. 基礎方程式の誘導

本論文で取り扱うモデルとしては簡単のため土層を構成する土粒子は全て等しい径の球からなり、土粒子が縦に並んでいる場合を考える。土層最上部の土粒子には一様な降雨 r があるものとし、この降雨により水は球面上を流下する。流水は土粒子接合部で水と空気の表面張力によるサクシジョンのためすぐには次の土粒子に向かって流下せず保水される。雨水が下層の土粒子に向かって流下し始めるのは全保水重量が表面張力を上回った後である。そこで本節では先ず最初に1球のみの場合の流れの基礎方程式の誘導を行い、次に土粒子接合部でのサクシジョンおよび保水量の算定の基礎式の誘導を行う。

2. 1 球面上の薄層流

球面上の流れとして、図-1に示すような座標系を考える。球の上半分に連続的に一様な降雨 r があるものとする流れは $X=0$ において Y 軸に対称となる。また流れが非常の遅く層流であるとする速度成分は X 軸に平行な速度成分 V のみとなる。今、流水は非圧縮性(ρ :水の密度=const.)であるとし、 X 軸方向の平均流速を $\bar{V}$ とすると、 Δt 時間に微小区間 ΔX の流入出量および降雨による横流入量の増加は $\Delta X = R \Delta \theta$ を考慮して

$$-2\pi\rho\Delta X\Delta t\left\{h\bar{V}\cos\theta+R\frac{\partial(h\bar{V})}{\partial X}\sin\theta-r(R+h)\cos\theta\sin\theta\right\} \quad (1)$$

Study on Microscopic Water Movement in Porous Media Composed of Equable Particles.
by Takashi NAKAO and Mutsuhiro FUJITA.

これだけの質量が溜る結果、 ΔX 区間の質量が Δt 時間に増加する量は

$$2\pi\rho\sin\theta\frac{(R+h)^2}{R}\frac{\partial h}{\partial t}\Delta X\Delta t \quad (2)$$

となる。したがって、両者が等しいとして降雨量 r がある場合の非定常流の連続の式

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} = & -\frac{R}{\sin\theta(R+h)^2}\frac{\partial(q\sin\theta)}{\partial\theta} \\ & + r\cos\theta\frac{R}{R+h} \end{aligned} \quad (3)$$

を得る。

ここに、 h ：水深、 R ：土粒子の半径、 θ ： $X=0$ からの角度、

q ：単位幅当たりの流量（ $=h\bar{V}$ ）

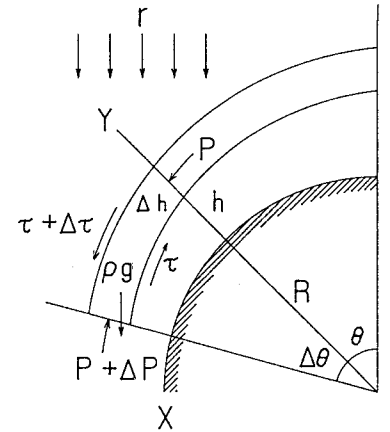


図-1 座標系と微小要素に働く力

一方、球座標表示による運動方程式は速度成分が V のみであること

を考慮して微小区間 ΔX 内に作用する力は図-1に示すように圧力、せん断力、重力成分のみが作用するものとする ΔX 内の各成分は、以下のようになる。

圧力成分

$$-2\pi(R+y)\Delta X\Delta y\left(\frac{P}{R}\cos\theta+\frac{\partial P}{\partial X}\sin\theta\right) \quad (4)$$

せん断力成分

$$\frac{2\pi}{R}\sin\theta(R+y)\Delta X\Delta y\left\{2\tau+\frac{\partial\tau}{\partial y}(R+y)\right\} \quad (5)$$

重力成分

$$2\pi\rho g\sin^2\theta\frac{(R+y)^2}{R}\Delta X\Delta y \quad (6)$$

したがって、 X 軸方向の運動方程式は式(7)で与えられる。

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial X}=-\frac{1}{\rho}\left[\left\{\frac{P}{R+y}\cot\theta+\frac{R}{R+y}\frac{\partial P}{\partial X}\right\}-\left\{\frac{2\tau}{R+y}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\right\}-g\sin\theta\right] \quad (7)$$

$h\bar{V}=\int_0^h V dy$ であることを考慮し、また圧力 P は静水圧分布するものと仮定すると、式(7)を0

から h まで積分して式(8)を得る。

$$\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\alpha\bar{V}^2)}{\partial X}=g\sin\theta\left\{(R+h)\log\left(\frac{R+h}{R}\right)-h\right\}+2\nu\frac{V_h}{R+h}-\frac{\tau_0}{\rho}+gh\sin\theta \quad (8)$$

ここに、 α ：補正係数（ ≈ 1 ）、 ν ：水の動粘性係数、 V_h ：水面上の流速、 τ_0 ： $y=0$ におけるせん断力
式(8)は $y=0$ で流速 $V_0=0$ 、また水と空気の間せん断力は無視できるほど小さいとして解かれているが V_h 、 τ_0 を得るのには Y 軸上の流速分布が既知でなければならない。本方法では非定常時でも定常時の V_h 、 τ_0 の値が変わらないものとして、 V_h 、 τ_0 は定常時の値を非定常状態の場合にも適用する。定常状態の連続の式およびナビエ・ストークスの運動方程式は式(9)～(11)で与えられる²⁾。

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V\sin\theta)=0 \quad (9)$$

$$-\rho \frac{V^2}{\gamma} = -\frac{\partial P}{\partial \gamma} - \frac{2\mu}{\gamma^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + V \cot \theta \right) - \rho g \cos \theta \quad (10)$$

$$\rho \frac{V}{\gamma} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (\gamma^2 \frac{\partial V}{\partial \gamma}) + \frac{1}{\gamma^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}) - \frac{V}{\gamma^2 \sin \theta} \right\} + \rho g \sin \theta \quad (11)$$

ここに、 γ :土粒子の中心を原点とする球座標軸であり ($\gamma = R + y$)、 μ :水の粘性係数
上式を境界条件

$$\gamma = R + h \rightarrow P = 0 \quad (12) \quad \gamma = R \rightarrow V = 0 \quad (14)$$

$$\tau = 0 \quad (13) \quad \tau = \tau_0 \quad (15)$$

で解く。流れが非常に遅く、式(10)の左辺の遠心力の項が無視できるものとして、式(9)を代入した後、境界条件(12)のもとで積分すると、

$$P = \rho g \cos \theta (R + h - \gamma) \quad (16)$$

となり、圧力は静水圧分布となる。

また、球座標系におけるせん断力と速度勾配の関係は式(17)で与えられる²⁾。

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma} - \frac{V}{\gamma} \right) \quad (17)$$

式(16)を式(11)に代入した後、積分して境界条件(13)～(15)のもとで解き、式(17)を考慮すると

$$V_h = \frac{\rho g (R + h) h^2 \sin \theta}{2\mu (R - h)} \quad (18) \quad \tau_0 = -\frac{\rho g (R + h) h \sin \theta}{R - h} \quad (19)$$

を得る。式(18)、(19)を式(8)に代入し、最終的に球座標系による運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{2r_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{q^2}{h} \right) + g \sin \theta \left\{ (R + h) \log \left(\frac{R + h}{R} \right) - h \right\} + g h \sin \theta \frac{2R + h}{R - h} \quad (20)$$

2. 2 球の接合部におけるサクション

球面上を流下した薄層流は下端の土粒子との接合部において水の表面張力により、サクションが発生し、下部の土粒子に向かってすぐには流れ出さずにリング水として土粒子接合部で保水される。図-2に示すように等球の半径 R からなる2球間のリング水の曲率半径を r_1 、 r_2 とし、水と空気との表面張力を σ 、また土粒子と水の接触角を θ とすると水 (P_w) と大気 (P_a) の圧力差は式(21)に示される表面張力のラプラスの式³⁾で与えられる。曲率半径 r_1 、 r_2 は図-2を参考にし、平面三角の性質より、式(22)、(23)となる。

$$P_w - P_a = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (21)$$

$$r_1 = \frac{R (\sin \omega + \cos \omega - 1)}{\cos \omega} \quad (22)$$

$$r_2 = \frac{R (1 - \cos \omega)}{\cos \omega} \quad (23)$$

図-3は式(21)～(23)より得られる球の半径 R を0.5, 0.25, 0.125mmと変化させたときの ω とサクション (水頭) を $\sigma = 0.00742 \text{ kgf/m}$ (20℃) とした場合について示している。同一の ω でも粒径が小さくなるにつれ、

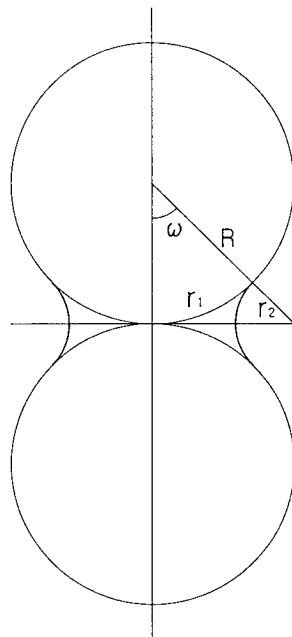


図-2 リング水の概念図

サクシヨンの値は著しく大きくなり、いずれの場合でも ω の増加とともにサクシヨンは急激に減少する。
式(21)よりサクシヨンが0となるのは土粒子の半径に拘らず、 $\omega=53.13^\circ$ が得られる。

一方、サクシヨンによる保水量(V_w)は r_1 を半径とする断面積を土粒子とリング水の接触点の範囲で積分することにより次式で与えられる。

$$V_w = 2\pi R^3 (1 - \cos \omega)^2 \frac{1 - \tan \omega \cdot \sin^{-1}(\cos \omega)}{\cos^2 \omega} \quad (24)$$

図-4は図-3と同様に土粒子の半径を変化させた時の ω とリング水の保水量の関係を示している。図からも明らかなようにリング水の保水量は大きく土粒子の半径に依存していることがわかる。

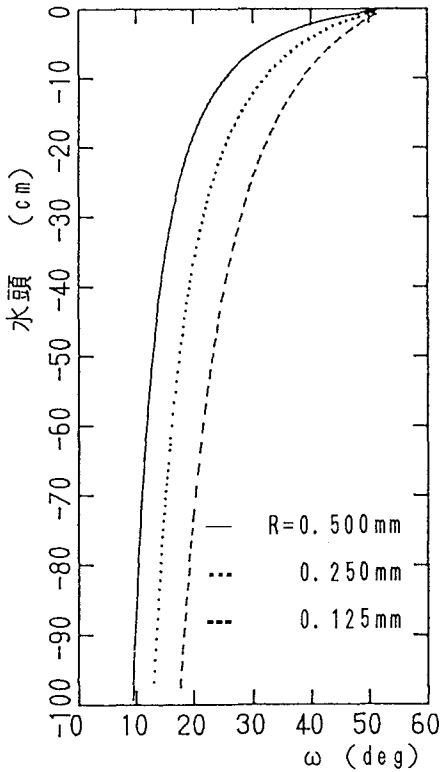


図-3 ω とサクシヨンの関係

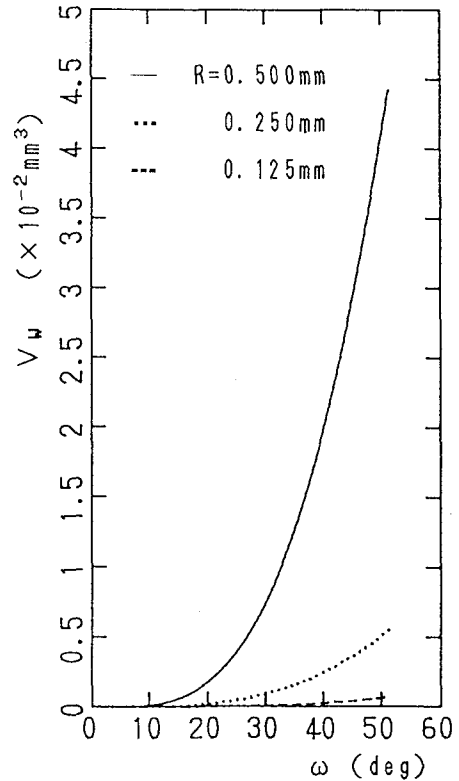


図-4 ω と V_w の関係

3. 球面上の流れのシミュレーション例

本モデルの計算例として直径0.5mmの球からなる土粒子に雨量強度10mm/hrの降雨が一様に土粒子の上半分に降り続ける場合の流れのシミュレーションを行った。計算法としては連続の式(3)と運動方程式(20)を時間座標、空間座標とも前進差分により差分化し、また境界条件および初期条件として、

$$\text{初期条件 } t=0 \rightarrow h=0, \text{ 境界条件 } X=0 \rightarrow \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{X=0} = 0, \quad q=0 \quad (25)$$

のもとに数値解法により計算を行った。計算に用いた時間間隔 Δt は1/50,000秒であり、 ΔX として球の最上端部から最下端部まで10等分(18度おき)して計算を行っている。

図-5は時間ステップ100ステップ毎の空間座標点、第1,5,9点上の流量の時間変化を示している。降雨を直接受ける第1点の流量は計算開始直後から漸次増大し、400ステップ(0.008秒)後にピークとなり、そ

の後減少しはじめ、ほぼ1,000ステップ(0.02秒)後に定常値となる。この流量のピークの出現は第5および第9点でも見られ、ピーク値も順次増大し、ピーク到達時間も遅れていることが分かる。このピークが出現する理由としては2つ考えられる。第1の理由は降雨量として $r=10\text{mm/hr}$ の様な降雨を与えているが、球面の法線方向の降雨分布は $r \cdot \cos\theta$ となり、余弦関数の分布をする事が考えられる。第2の理由としてkinematic waveの発生が考えられるがこの点に関してはさらに検討を要する。第9点に流水が最初に到達するは200ステップ(0.004秒)後であり、仮に直径0.5mmの球からなる土粒子が層厚1mで縦に直列に並んでいるものとする土粒子の個数は2,000個となり各土粒子に於ける下端までの時間遅れの総和は8秒となる。

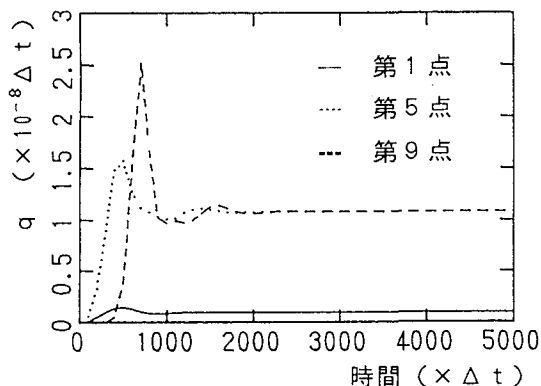


図-5 流量の時間変化

図-6～8は計算開始直後の10ステップ(0.0002秒)、第9点の流量がピークとなる700ステップ(0.014秒)および第9点が定常となった4,000ステップ後の球断面の水深と流速の分布を極座標により示している。10ステップでの水深分布は上流で最大となっており、流速の最大は第5点(最上流点より 90°)に見られる。時間の経過と共に各点の水深、流速とも増加し、700ステップでは水深の最大点は下流端に移動する。定常時の4,000ステップにおける第9点の水深と流速は、それぞれ $5.8 \times 10^{-6}\text{mm}$ 、 77.1mm/sec となり、このときの ν を $1\text{mm}^2/\text{sec}$ (20°C)とすれば $Re=4.5 \times 10^{-4} < 1$ 、 $Fr=323 > 1$ となり、層流状態の射流となる。

$r=10\text{mm/hr}$ $R=0.25\text{mm}$
 $\text{time}=10/50000(\text{sec})$
 Water Depth Velocity
 $\times 10^{-7}(\text{mm})$ $\times 10^0(\text{mm/sec})$

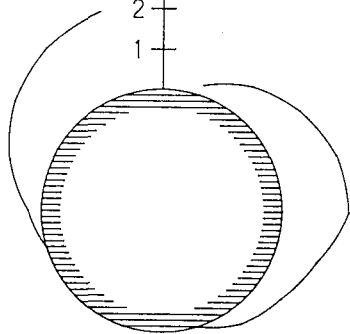


図-6 水深および流速の分布
(10ステップ)

$r=10\text{mm/hr}$ $R=0.25\text{mm}$
 $\text{time}=700/50000(\text{sec})$
 Water Depth Velocity
 $\times 10^{-5}(\text{mm})$ $\times 10^2(\text{mm/sec})$

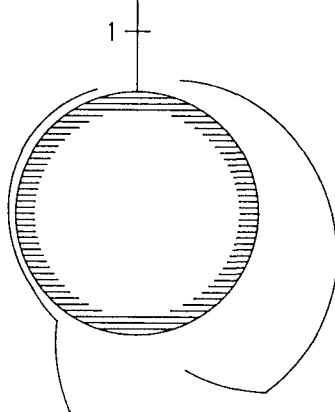


図-7 水深および流速の分布
(700ステップ)

4. まとめ

本研究では土壌内の浸透水の流れを微視的に解析することを目的に土壌を構成する土粒子を球形と仮定し、球面を流れる粘性を考慮した1次元流れの式を提案した。また、土壌内の保水効果として土壌粒子接合部におけるサクションによるリング水の保水効果を考え、土粒子の径がサクションに大きく影響することを示した。

先にも述べたように降雨強度が 10mm/hr程度の降雨では球面上の薄層流は水深が最大となる定常状態でも 10^{-5} mmのオーダーである。このような薄層流れにおいて表面張力が卓越すると言われており、本モデルにも流れの解析に当たって表面張力を考慮する必要があると思われる。また、リング水の保水効果は浸透の時間遅れに非常に影響する。リング水によって保水された水が下層へ流れ出すにはリング水の保水量とリング水表面上の表面張力の関係をより詳細に検討する必要がある。

著者らは現在、土粒子が縦のみの構成ではなく横に

も広がった場合のモデルについて研究中であり、上記の問題点を考慮して以後、研究を進める予定である。

謝辞 本研究は平成3年度・文部省科学研究費・一般研究(B)「ゴルフ場の造成が土砂流出、河川流量および水質におよぼす影響について」(代表：藤田睦博)の助成のもとに行われた研究である。ここに記して感謝の意を表す。

《参考文献》

- 1) Dias, M. M and Payatakes, A. C: Network models for two-phase flow in porous media, J. Fluid Mech., vol. 164, pp. 305-336, 1986.
- 2) 松梨順三郎: 環境流体輸送, 日刊工業新聞社, 1991.
- 3) 例えば、小野 周: 表面張力, 物理学 One Point 9, 共立出版, 1980.

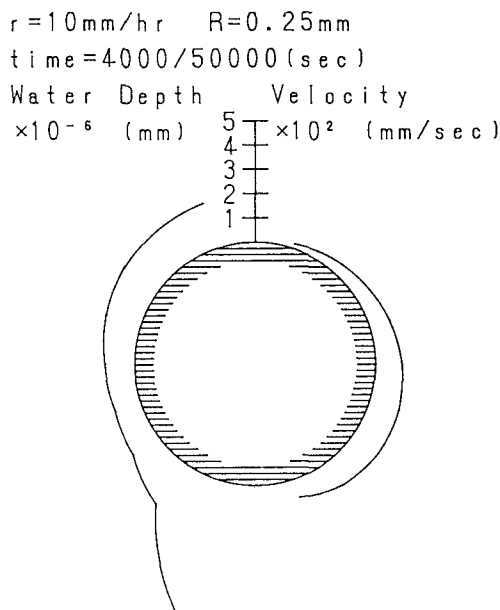


図-8 水深および流速の分布
(4,000ステップ)